

Неоднородный метод максимума совместности для восстановления зависимостей по интервальным данным

С.П. Шарый, А.В. Молодцова

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий

Новосибирский государственный университет

22 июня 2026 г.

I. Теория

Восстановление линейных функций

Задача восстановления зависимостей

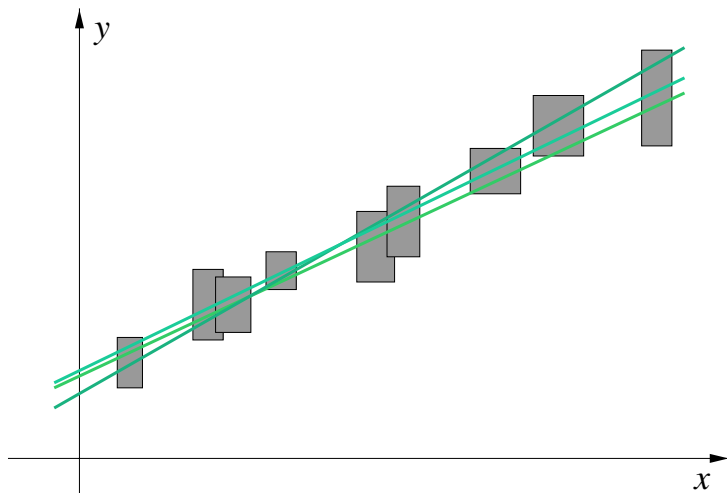
— по эмпирическим данным требуется построить
функциональную зависимость заданного вида.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n.$$

Нужно найти коэффициенты β_i , чтобы функция
«наилучшим образом» приближала набор интервальных данных

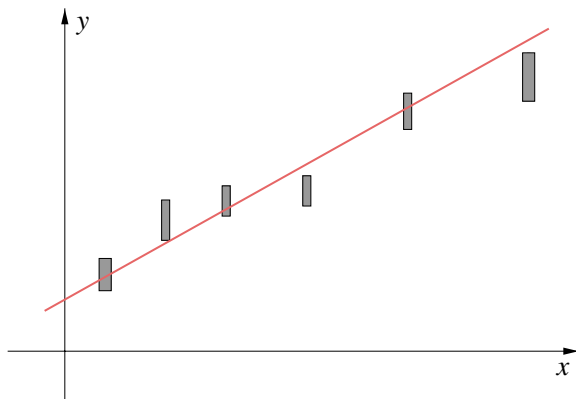
$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x}_{11}, & \mathbf{x}_{12}, & \dots, & \mathbf{x}_{1n}, & \mathbf{y}_1, \\ \mathbf{x}_{21}, & \mathbf{x}_{22}, & \dots, & \mathbf{x}_{2n}, & \mathbf{y}_2, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_{m1}, & \mathbf{x}_{m2}, & \dots, & \mathbf{x}_{mn}, & \mathbf{y}_m. \end{array}$$

Восстановление зависимости по неточным данным



Восстановление зависимости по интервальным данным

Иногда не существует набора параметров, совместных с данными

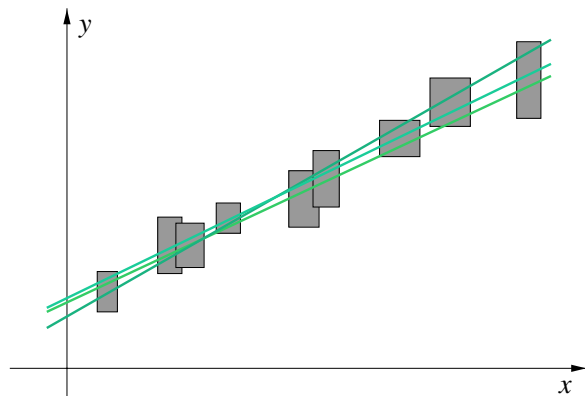


Тем не менее, мы всё равно должны как-то построить функцию,
которая имеет «наименьшую несовместность» с данными.

Восстановление зависимости по интервальным данным

Общий подход является стандартным:

- 1) определяем
«меру совместности»
между данными
и параметрами
- 2) точка её максимума
берётся в качестве
оценки параметров



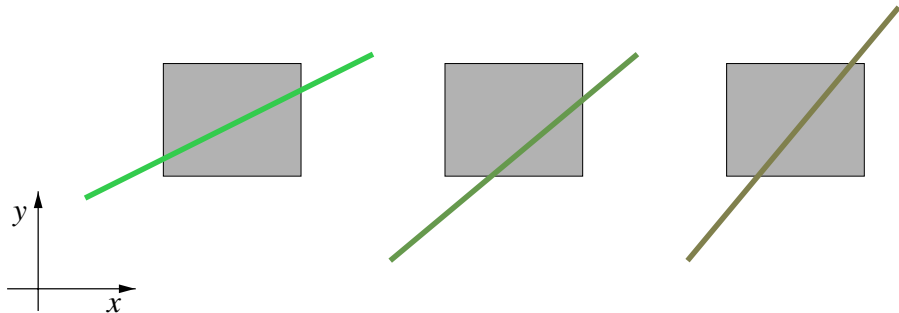
Мера совместности интервальной системы уравнений

Что брать в качестве количественной меры совместности?

Традиционно мерой совместности системы уравнений $Ax = b$
на каком-то приближённом решении $\tilde{x}$ является *невязка*,

$$A\tilde{x} - b$$

Но для исследования совместности интервальных систем уравнений
— непустоты их множеств решений — эта конструкция не годится.



$$(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \mathbf{y}_i)^\top, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Допусковое множество решений

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \{ \beta \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\forall X \in \mathbf{X})(\exists y \in \mathbf{y})(X\beta = y) \}.$$

Критерий принадлежности

Точка $\tilde{\beta}$ принадлежит допусковому множеству решений системы линейных уравнений $\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{X} \cdot \tilde{\beta} \subseteq \mathbf{y}.$$

Это включение называется характеристическим включением.

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$

— образована интервалами $a = [\underline{a}, \bar{a}] \subset \mathbb{R}$ так, что

$$a \star b = \{ a \star b \mid a \in a, b \in b \} \quad \text{для любых } \star \in \{+, -, \cdot, /\}$$

$$a + b = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

$$a - b = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$$

$$a \cdot b = \left[\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\} \right]$$

$$a/b = a \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}] \quad \text{для } b \not\ni 0$$

Объединённое множество решений

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \{ \beta \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\exists X \in \mathbf{X})(\exists y \in \mathbf{y})(X\beta = y) \}.$$

Критерий принадлежности

Точка $\tilde{\beta}$ принадлежит объединённому множеству решений системы линейных уравнений $\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда

$$\text{dual } \mathbf{X} \cdot \tilde{\beta} \subseteq \mathbf{y}.$$

Это включение называется характеристическим включением.

Мера совместности интервальной системы уравнений

$$X \cdot \beta \subseteq y$$

Естественная идея:

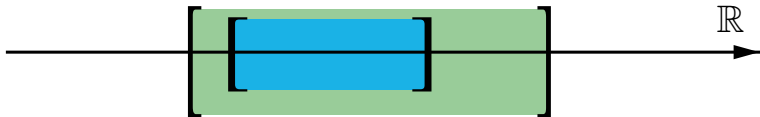
количественно охарактеризовать «меру совместности»
как запас включения левой части в правую в этом соотношении,
т. е. «насколько сильно» левая часть включена в правую.

Резерв включения

Для интервалов p и q назовём *резервом включения* $p \subseteq q$

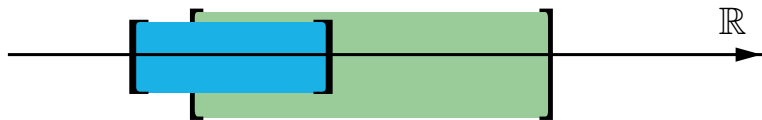
такое наибольшее вещественное число R_{sv} , что

$$p + [-R_{sv}, R_{sv}] \subseteq q$$



Резерв включения

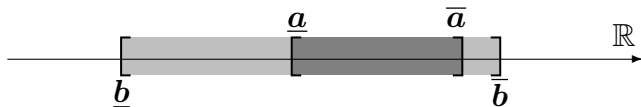
Определение имеет смысл для $R_{sv} < 0$, если операции и отношения понимаются в полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$.



Если $R_{sv} < 0$, то $[-R_{sv}, R_{sv}]$ — «неправильный интервал» из $\mathbb{KR}$, и $|R_{sv}|$ показывает, насколько далека левая часть в $a \subseteq b$ от включения в правую.

Тогда резерв превращается в «дефицит».

Аналитическое выражения для резерва



Если $a \subseteq b$, то

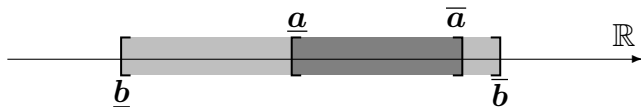
$$\underline{a} \geq \underline{b} \quad \text{и} \quad \bar{a} \leq \bar{b},$$

и поэтому

$$\text{Rsv} = \min \{ \underline{a} - \underline{b}, \bar{b} - \bar{a} \}. \quad (*)$$

Выражение имеет смысл даже если $a \not\subseteq b$.

Аналитическое выражения для резерва



Если $a \subseteq b$, то

$$\underline{a} \geq \underline{b} \quad \text{и} \quad \bar{a} \leq \bar{b},$$

и поэтому

$$\text{Rsv} = \min \{ \underline{a} - \underline{b}, \bar{b} - \bar{a} \}. \quad (*)$$

Выражение имеет смысл даже если $a \not\subseteq b$.

Но выражение $(*)$ не очень удобно, так как представляет резерв через концы интервалов, тогда как он определён с помощью раздутья относительно середины.

Характеристики интервалов

$$\underline{a}, \quad \overline{a}$$

— нижний и верхний концы

$$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \underline{a})$$

— середина

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\overline{a} - \underline{a})$$

— радиус

$$\text{wid } \mathbf{a} = \overline{a} - \underline{a}$$

— ширина

$$|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}$$

— абсолютное значение (модуль)

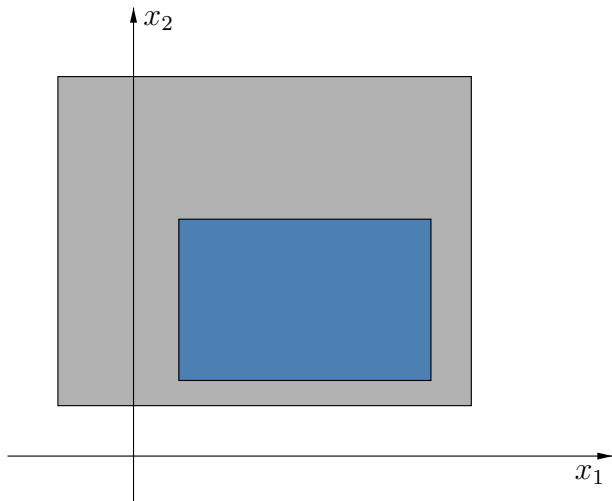
Аналитическое выражения для резерва

$$\begin{aligned}\min \{ \underline{a} - \underline{b}, \bar{b} - \bar{a} \} &= \min \{ \underline{a} - \text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b}, \text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b} - \bar{a} \} \\ &= \text{rad } \mathbf{b} + \min \{ \underline{a} - \text{mid } \mathbf{b}, \text{mid } \mathbf{b} - \bar{a} \} \\ &= \text{rad } \mathbf{b} - \max \{ \text{mid } \mathbf{b} - \underline{a}, \bar{a} - \text{mid } \mathbf{b} \} \\ &= \text{rad } \mathbf{b} - |\mathbf{a} - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{b} - |\text{mid } \mathbf{b} - \mathbf{a}|,\end{aligned}$$

где используется короткое представление модуля:

$$|\mathbf{a}| = \max \{ -\underline{a}, \bar{a} \}.$$

Резерв включения



Резерв включения

Для интервальных векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ назовём *резервом включения* $\mathbf{p} \subseteq \mathbf{q}$ такое наибольшее вещественное число R_{sv} , что

$$\mathbf{p} + [-R_{sv}, R_{sv}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbf{q}$$

Резерв включения

$$\text{Rsv} = \min_{1 \leq i \leq n} \min \left\{ \underline{p}_i - \underline{q}_i, \bar{q}_i - \bar{p}_i \right\}$$

$$\text{Rsv} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{rad } \mathbf{q}_i - |\text{mid } \mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i| \right\}$$

Критерий включения

$$\text{Rsv} \geq 0$$

Распознающий функционал

Комбинируя критерий принадлежности допусковому множеству решений и понятие резерва, определим

$$\text{Tol}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{rad } \mathbf{y}_i - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - \sum_{j=0}^m \mathbf{x}_{ij} \beta_j \right| \right\}$$

— *распознающий функционал*

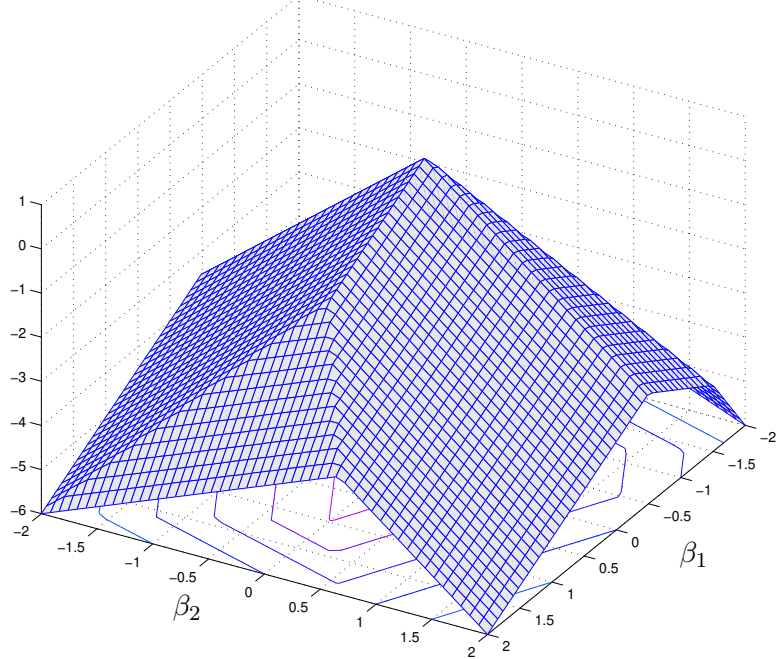
множества решений интервальной системы уравнений.

$$\text{Tol}(\hat{\beta}, \mathbf{X}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\beta} \in \text{множеству решений}$$

Резерв включения

- Irene A. Sharaya and Sergey P. Shary
Reserve as recognizing functional for interval linear systems
Abstracts of SCAN'2014, Würzburg, September 21–26, 2014.
- Irene A. Sharaya and Sergey P. Shary
Reserve of characteristic inclusion as recognizing functional for interval linear systems // Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics. 16th International Symposium, SCAN 2014, Wuerzburg, Germany, September 21-26, 2014. Revised Selected Papers / Lecture Notes in Computer Science, vol. 9553. – Cham, Switzerland: Springer, 2016. – P. 148–167.
- И.А. Шарая, С.П. Шарый
Резерв характеристического включения для интервальных линейных систем отношений // Вычислительные технологии. – 2021. – Т. 26, №3. – С. 61–85.

Значения функционала



Метод максимума совместности

... для оценивания параметров функции

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n.$$

В качестве оценки параметров функции берём точку $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)$ в которой достигается максимум распознающего функционала Tol

Метод максимума совместности

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$$

- Если $\max \text{Tol} \geq 0$, то $\hat{\beta}$ лежит во множестве параметров совместных с данными, максимизируя совместность.
- Если $\max \text{Tol} < 0$, то множество параметров, совместных с данными, пусто, но $\hat{\beta}$ минимизирует несовместность.

Метод максимума совместности

— для точечных данных превращается в чебышёвское сглаживание.

Если $X = (x_{ij})$ и $y = (y_i)$, то

$$\text{rad } y_i = 0, \quad \text{mid } y_i = y_i, \quad x_{ij} = x_{ij} \quad \text{для всех } i, j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{Tol}(\beta, X, y) &= \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ - \left| y_i - \sum_{j=0}^n x_{ij} \beta_j \right| \right\} = - \max_{1 \leq i \leq n} \left| y_i - \sum_{j=0}^n x_{ij} \beta_j \right| \\ &= - \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^n x_{ij} \beta_j - y_i \right| = - \| X\beta - y \|_{\infty}. \end{aligned}$$

В выписанной выше формуле $\|\cdot\|_\infty$ — чебышёвская норма (∞ -норма) векторов:

$$\|z\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

Тогда

$$\max \text{Tol}(\beta) = - \min_{\beta \in \mathbb{R}^m} \left\| \left(\sum_{j=0}^n x_{ij} \beta_j - y_i \right)_{i=1}^n \right\|_\infty,$$

$$\text{поскольку } \max(-f(\beta)) = -\min f(\beta).$$

В выписанной выше формуле $\|\cdot\|_\infty$ — чебышёвская норма (∞ -норма) векторов:

$$\|z\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

Тогда

$$\max \text{Tol}(\beta) = - \min_{\beta \in \mathbb{R}^m} \left\| \left(\sum_{j=0}^n x_{ij} \beta_j - y_i \right)_{i=1}^n \right\|_\infty,$$

$$\text{поскольку } \max(-f(\beta)) = -\min f(\beta).$$



для точечных данных максимум распознающего функционала эквивалентен минимизации чебышёвской нормы невязки.

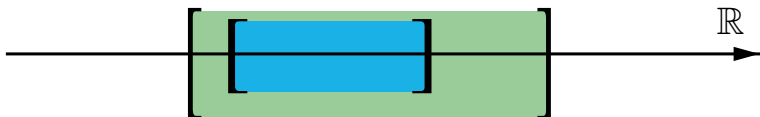
II. Теория

Неоднородный метод максимума совместности

Резерв включения

Для интервалов p и q назовём *резервом включения* $p \subseteq q$
такое наибольшее вещественное число R_{sv} , что

$$p + [-R_{sv}, R_{sv}] \subseteq q$$



Но почему равномерное раздутие (сжатие)? ...

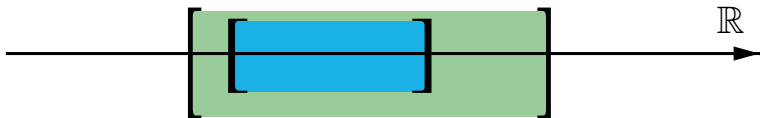
Неоднородный резерв включения

Пусть имеем интервальные векторы p, q , причём $p \subseteq q$.

Пусть также $\underline{\ell}$ и $\bar{\ell}$ — положительные весовые векторы, задающие относительную меру изменения нижних и верхних концов интервалов при их раздутии.

Неоднородным резервом включения $p \subseteq q$, соответствующим весовым векторам $\underline{\ell}$ и $\bar{\ell}$, назовём такое наибольшее число R_{sv} , что

$$p + [-\underline{\ell} R_{sv}, \bar{\ell} R_{sv}] \subseteq q.$$



Вывод выражения для одномерного случая

$$\mathbf{p} + [-\underline{\ell} \text{Rsv}, \bar{\ell} \text{Rsv}] \subseteq \mathbf{q}$$

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{p}} - \underline{\ell} \text{Rsv} \geq \underline{\mathbf{q}}, \\ \bar{\mathbf{p}} + \bar{\ell} \text{Rsv} \leq \bar{\mathbf{q}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Rsv} \leq \frac{1}{\underline{\ell}} (\underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{q}}), \\ \text{Rsv} \leq \frac{1}{\bar{\ell}} (\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}}) \end{cases}$$

$$\text{Rsv} = \min \left\{ \frac{1}{\underline{\ell}} (\underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{q}}), \frac{1}{\bar{\ell}} (\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}}) \right\}$$

Неоднородный резерв и неоднородный функционал

Неоднородным резервом включения интервальных векторов $\mathbf{p} \subseteq \mathbf{q}$ назовём величину

$$\text{Rsv} = \min_{1 \leq i \leq n} \min \left\{ \frac{1}{\underline{\ell}_i} (\underline{\mathbf{p}}_i - \underline{\mathbf{q}}_i), \frac{1}{\bar{\ell}_i} (\bar{\mathbf{q}}_i - \bar{\mathbf{p}}_i) \right\}.$$

Неоднородный распознающий функционал

для допускового множества решений системы $\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$:

$$\text{Tol}_\ell(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{1 \leq i \leq n} \min \left\{ \frac{1}{\underline{\ell}_i} ((\underline{\mathbf{X}}\beta)_i - \underline{\mathbf{y}}_i), \frac{1}{\bar{\ell}_i} (\bar{\mathbf{y}}_i - (\overline{\mathbf{X}}\beta)_i) \right\}$$

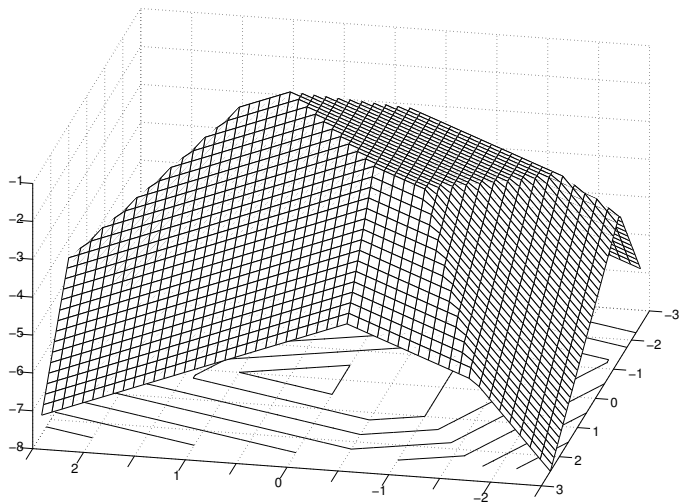
Иногда просто $\text{Tol}_\ell(\beta)$

Свойства неоднородного распознающего функционала

- 1 Отображение $\text{Tol}_\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывным.
- 2 Функционал $\text{Tol}_\ell(\beta)$ — вогнутая функция.
- 3 Подграфик функционала $\text{Tol}_\ell(\beta)$ — полиэдральное множество.
- 4 Функционал $\text{Tol}_\ell(\beta)$ достигает конечного максимума на всем $\mathbb{R}^n$.
- 5 Пусть интервальная линейная система уравнений $\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$ такова, что её расширенная матрица $(\mathbf{X}|\mathbf{y})$ не содержит строк, в которых каждый элемент имеет нуль хотя бы одним своим концом.

Тогда, если $\beta \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{X}, \mathbf{y})$, то $\text{Tol}_\ell(\beta) > 0$.

- 6 Если $\text{Tol}_\ell(\beta) > 0$, то $\beta \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$.



Метод максимума совместности

... для оценивания параметров функции

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n.$$

В качестве оценки параметров функции берём точку $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)$ в которой достигается максимум распознающего функционала Tol_ℓ

Неоднородный метод максимума совместности

— для точечных данных в общем случае

не превращается в чебышёвское сглаживание.

$$\|x\| = \begin{cases} 0.5x, & \text{если } x \geq 0, \\ -3x, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Алгоритмы поиска максимума распознающего функционала

Так как распознающий функционал является негладкой функцией,
приходим к задаче негладкой оптимизации с целевой функцией ToI_ℓ :

- r -алгоритм ¹
- Метод варьирования уровня
- Сведение к задаче линейного программирования ²

¹Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

²Шарый С.П., Жилин С.И. Простые, быстрые и надёжные способы максимизации распознающего функционала. Вычислительные технологии. 2023; 28(5):87-100.

Программная реализация

В системе компьютерной математики Octave созданы программы для поиска максимума неоднородного распознающего функционала, которые модифицируют уже существующие:

- `tolsopty_m` — реализует r -алгоритм.
- `tolinprog_m` — реализует метод варьирования уровня и сведение к задаче линейного программирования.

Основная трудность — реализация подпрограммы вычисления неоднородного распознающего функционала и его субградиента.

III. Теория

Восстановление нелинейных функций

Задача восстановления зависимостей

По набору данных нужно построить функциональную зависимость заданного вида

$$y = f(x, \beta),$$

где $x \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых переменных,

$y \in \mathbb{R}$ — зависимая переменная, β — параметр.

Необходимо найти такую оценку параметра β , что функция

«наилучшим образом» соответствует набору данных

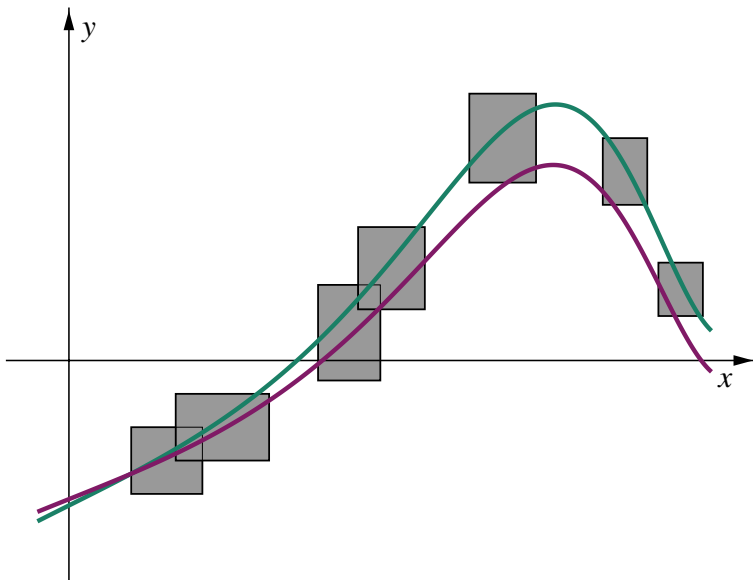
$$\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{y}_1,$$

$$\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \dots, \mathbf{x}_{2m}, \mathbf{y}_2,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\mathbf{x}_{n1}, \mathbf{x}_{n2}, \dots, \mathbf{x}_{nm}, \mathbf{y}_n.$$

Восстановление зависимости по интервальным данным



Задача восстановления функциональной зависимости

Пусть β — l -мерный вектор параметров,

$$\text{т. е. } \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) \in \mathbb{R}^l.$$

Подставляя экспериментальные данные в выражение
для функциональной зависимости, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_{i1}, x_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = \mathbf{y}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

относительно неизвестных $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$.

Задача восстановления функциональной зависимости

... в краткой форме,

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}_{i:}, \beta) = \mathbf{y}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

где $\mathbf{X}_{i:}$ — i -ая строка матрицы данных

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \dots & \mathbf{x}_{1m} \\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \dots & \mathbf{x}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{n1} & \mathbf{x}_{n2} & \dots & \mathbf{x}_{nm} \end{pmatrix}$$

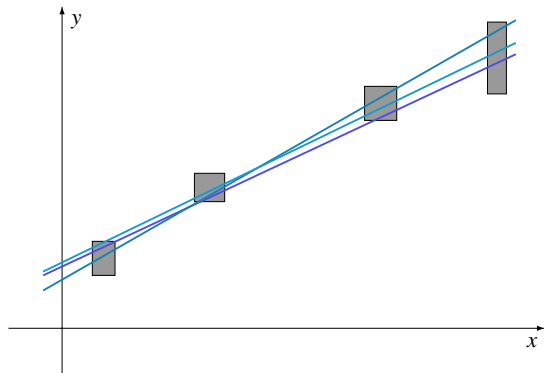
Нахождение оценки параметров функциональной зависимости

— это, фактически, «решение», в определённом смысле,
выписанной системы уравнений относительно $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$.

Восстановление зависимости по интервальным данным

Параметры $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ функции $y = f(x, \beta)$ называются слабо совместными с интервальными данными $(\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, если для каждого i существуют такие $x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, \dots, x_{im} \in \mathbf{x}_{im}$ и $y_i \in \mathbf{y}_i$ в пределах измеренных интервалов, что они делают истинным равенство

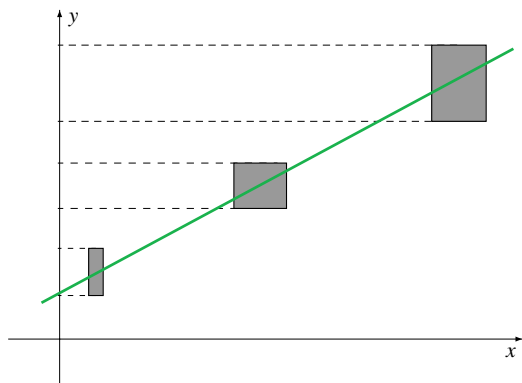
$$f(x_{i1}, \dots, x_{im}, \beta_1, \dots, \beta_l) = y_i.$$



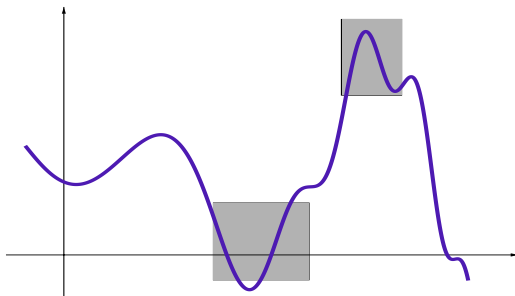
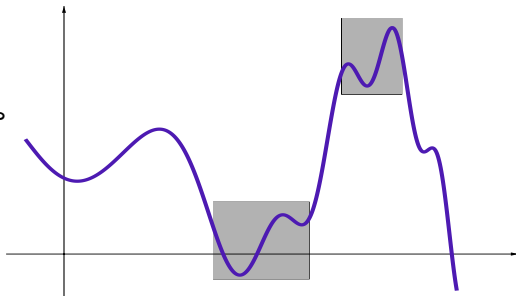
Восстановление зависимости по интервальным данным

Параметры $\beta_1, \dots, \beta_l$ функции $y = f(x, \beta)$ сильно совместны с интервальными данными $(\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, если для каждого i при любых значениях $x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, \dots, x_{im} \in \mathbf{x}_{im}$ существуют $y_i \in \mathbf{y}_i$ в пределах измеренных интервалов, что выполнено равенство

$$f(x_{i1}, \dots, x_{im}, \beta_1, \dots, \beta_l) = y_i,$$



СИЛЬНАЯ СОВМЕСТИСТЬ



слабая совместность

Восстановление зависимости по интервальным данным

Множество параметров, слабо совместных с данными —

$$\left\{ \beta \in \mathbb{R}^m \mid (\exists X_{i:} \in \mathbf{X}_{i:}) (\exists y_i \in \mathbf{y}_i) (f(X_{i:}, \beta) = y_i), i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

где $\mathbf{X}$ — $n \times m$ -матрица с элементами x_{ij} .

В интервальном анализе это объединённое множество решений интервальной системы алгебраических уравнений $\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$.

Восстановление зависимости по интервальным данным

Множество параметров, сильно совместных с данными —

$$\left\{ \beta \in \mathbb{R}^m \mid (\forall X_{i:} \in \mathbf{X}_{i:}) (\exists y_i \in \mathbf{y}_i) (f(X_{i:}, \beta) = y_i), i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

где $\mathbf{X}$ — $n \times m$ -матрица с элементами x_{ij} .

В интервальном анализе это допускосвое множество решений
интервальной системы алгебраических уравнений $\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$.

Совместность интервальных уравнений

Условия принадлежности точки множествам решений интервальной системы уравнений формулируются как условия на взаимное расположение области значений левой части, т.е. множества

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}, \beta) := \left\{ \begin{pmatrix} f(x_{11}, \dots, x_{1m}, \beta_1, \dots, \beta_l) \\ f(x_{21}, \dots, x_{2m}, \beta_1, \dots, \beta_l) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f(x_{n1}, \dots, x_{nm}, \beta_1, \dots, \beta_l) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} x_{ij} \in \mathbf{x}_{ij}, \\ i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right. \right\},$$

и бруса правой части $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)^\top$.

Совместность интервальных уравнений

Из определений множеств решений вытекает, что

- 1 точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит объединённому множеству решений Ξ_{uni} тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}, \tilde{\beta}) \cap \mathbf{y} \neq \emptyset.$$

Совместность интервальных уравнений

Из определений множеств решений вытекает, что

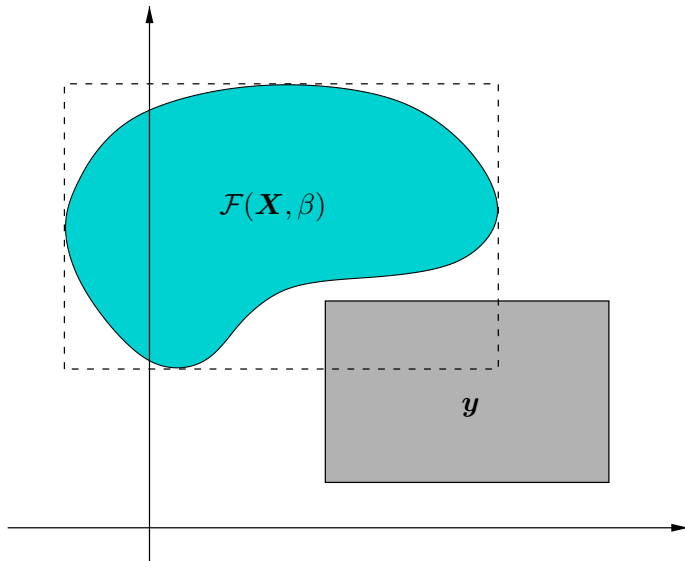
- 1 точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит объединённому множеству решений Ξ_{uni} тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}, \tilde{\beta}) \cap \mathbf{y} \neq \emptyset.$$

- 2 точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит допусковому множеству решений Ξ_{tol} тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}, \tilde{\beta}) \subseteq \mathbf{y}.$$

Чтобы применять эти результаты и развивать вычислительные методы нужно указать конструктивный способ нахождения области значений $\mathcal{F}(\mathbf{X}, \tilde{\beta})$.



Проблема оценивания области значений вектор-функции.

Совместность интервальных уравнений

Сформулированное затруднение преодолевается в случае, когда область значений вектор-функции $\mathcal{F}(\mathbf{X}, \tilde{\beta})$ есть прямое декартово произведение областей значений отдельных компонент.

Тогда область значений сама является интервальным брусом.

Это условие выполнено для интервальных результатов измерений, выполненных в разные моменты времени.

Совместность интервальных уравнений

Сформулированное затруднение преодолевается в случае, когда область значений вектор-функции $\mathcal{F}(\mathbf{X}, \tilde{\beta})$ есть прямое декартово произведение областей значений отдельных компонент.

Тогда область значений сама является интервальным брусом.

Это условие выполнено для интервальных результатов измерений, выполненных в разные моменты времени.

Но для допускового множества решений,

т. е. при проверке включения, всё гораздо проще!

Совместность интервальных уравнений

Обозначим через $f(\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \beta_1, \dots, \beta_l)$ область значений отображения f при изменении первых m аргументов в пределах интервалов $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{im}$ соответственно, т. е. пусть

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \beta_1, \dots, \beta_l) \\ &:= \{ f(x_{i1}, \dots, x_{im}, \beta_1, \dots, \beta_l) \mid x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, \dots, x_{im} \in \mathbf{x}_{im} \}. \end{aligned}$$

Эта область значений может быть найдена точно или же оценена объемлющим интервалом с помощью методов интервального анализа.

Пусть доступна точная интервальная оценка этого множества значений.

Совместность интервальных уравнений

Точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит допусковому множеству решений Ξ_{tol} тогда и только тогда, когда

$$(f(\mathbf{X}_{1:}, \beta), f(\mathbf{X}_{2:}, \beta), \dots, f(\mathbf{X}_{n:}, \beta))^\top \subseteq \mathbf{y},$$

или, в развёрнутой форме,

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{1m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ f(\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \dots, \mathbf{x}_{2m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f(\mathbf{x}_{n1}, \mathbf{x}_{n2}, \dots, \mathbf{x}_{nm}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}.$$

Характеризация допускового множества решений

$$(f(\mathbf{X}_{1:}, \beta), f(\mathbf{X}_{2:}, \beta), \dots, f(\mathbf{X}_{n:}, \beta))^{\top} \subseteq \mathbf{y}$$

Естественная идея:

количественно охарактеризовать «меру совместности»
как запас включения левой части в правую в этом соотношении,
т. е. «насколько сильно» левая часть включена в правую.

Точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m)$ лежит в допусковом множестве решений интервальной системы уравнений тогда и только тогда, когда

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{rad } \mathbf{y}_i - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - f(\mathbf{X}_{i:}, \tilde{\beta}) \right| \right\} \geq 0.$$

Отрицательные значения означают «дефицит совместности».

$$\text{Tol}(\beta) = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{rad } \mathbf{y}_i - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - f(\mathbf{X}_{i:}, \beta) \right| \right\},$$

знаком и величиной своих значений показывает совместность или несовместность точки $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)^\top$ с данными — $\mathbf{X}$ и $\mathbf{y}$ — и даёт количественную меру этой совместности.

Распознающий функционал множества решений

- допустимое множество решений Ξ
для интервальной системы уравнений
является лебеговым множеством (множеством уровня)

$$\{ \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \text{Tol}(\tilde{\beta}) \geq 0 \}$$

функционала Tol .

- ... с помощью знака своих значений функционал Tol
«распознаёт», принадлежит ли точка множеству Ξ .

Распознающий функционал, как мера совместности параметров и данных

Для допускового множества решений интервальной системы уравнений

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}_{i:}, \beta) = \mathbf{y}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{Tol}(\beta) = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{rad } \mathbf{y}_i - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - f(\mathbf{X}_{i:}, \beta) \right| \right\}$$

Его значения — «мера совместности» точки β

относительно допускового множества решений.

Метод максимума совместности

... для оценивания параметров функции

$$y = f(x, \beta),$$

В качестве оценки параметров функции берём точку $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m)$ в которой достигается максимум распознающего функционала Tol

Метод максимума совместности

$$y = f(x, \beta)$$

- Если $\max \text{Tol} \geq 0$, то точка $\hat{\beta}$ лежит во множестве параметров сильно совместных с данными, максимизируя совместность.
- Если $\max \text{Tol} < 0$, то множество параметров, сильно совместных с данными, пусто, но точка $\hat{\beta}$ минимизирует несовместность.

Метод максимума совместности

Но ...

нахождение максимума распознающего функционала становится трудным

= Задача оптимизации с негладкой
и (в общем случае) многоэкстремальной целевой функцией

Восстановление нелинейных зависимостей

Один из популярных приёмов — замена переменных.

$$y = f(x, \beta)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$u = g(v, \theta),$$

где g имеет более простой вид (например, линейный).

Популярнейшее преобразование — логарифмирование.

Восстановление нелинейных зависимостей

Но найденные для преобразованной формулы оптимальные значения параметров могут не быть таковыми для исходного выражения, поскольку нелинейные преобразования меняют также метрику пространства.

В традиционном неинтервальной случае — взвешенный МНК.

Восстановление нелинейных зависимостей

$$\text{Tol}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \eta_i \left(\text{rad } \mathbf{y}_i - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - \sum_{j=0}^m \mathbf{x}_{ij} \beta_j \right| \right) \right\},$$

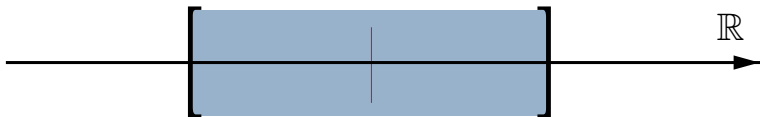
$$\text{Tol}(\beta) = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \eta_i \left(\text{rad } \mathbf{y}_i - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - f(\mathbf{X}_{i:}, \beta) \right| \right) \right\},$$

где $\eta_i > 0$ — весовые коэффициенты

Но ...

такое простое взвешивание недостаточно для полноценного учёта нелинейности.

Восстановление нелинейных зависимостей



Предлагается способ компенсации этого эффекта при восстановлении зависимостей по интервальным данным

- с помощью введения специальных поправочных коэффициентов и
- перехода к неоднородному методу максимума совместности.

IV. Приложения

Преобразование переменных

Эксперименты:

постановка задачи

Для демонстрации работы неоднородного метода максимума совместности рассмотрим простой пример:

$$y(x) = 2 \exp(-x).$$

Возьмём реальные значения этой функции на заданном наборе аргументов, искажим их интервальной неопределённостью и попытаемся восстановить по новым данным функцию вида

$$y(x) = \alpha \exp(\beta x).$$

После логарифмирования получаем

$$\ln y = \ln \alpha + \beta x.$$

Эксперимент 1:

данные задачи

Считаем, что значения x взяты точно и соответствующая таблица значений

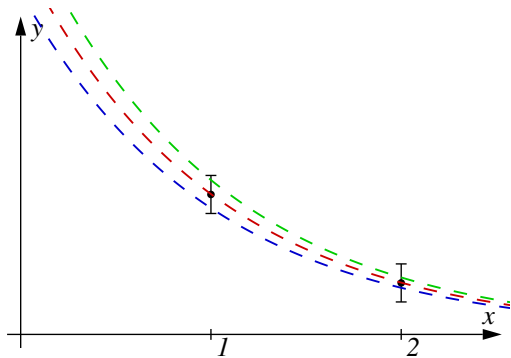
x	1	2
y	0.7358	0.2707

Интервалы значений зависимой переменной

предположим известными с радиусами $E = 0.1$

Имеем

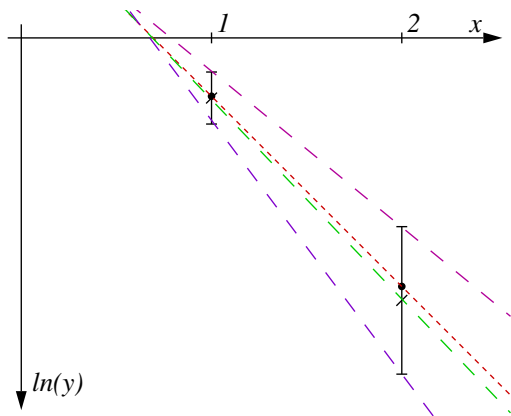
$$\mathbf{y}_1 = [0.6358, 0.8358], \quad \mathbf{y}_2 = [0.1707, 0.3707].$$



После логарифмирования:

$$\ln \mathbf{y}_1 = [-0.4529, -0.1797]$$

$$\ln \mathbf{y}_2 = [-1.7679, -0.99236]$$



Эксперимент 1:

выбор специальных коэффициентов

Необходимо выбрать значения $\underline{\ell}$ и $\bar{\ell}$,
чтобы они компенсировали изменения метрики.

Для этого рассмотрим интервалы $[y_i - E, y_i]$ и $[y_i, y_i + E]$.

После логарифмирования значения ширины интервалов различаются.

Берём значения равными

$$\underline{\ell}_i = \frac{1}{\text{wid } \ln[y_i - E, y_i]},$$

$$\bar{\ell}_i = \frac{1}{\text{wid } \ln[y_i, y_i + E]}, \quad i = 1, 2.$$

Эксперимент 1:

решение задачи

Для сравнения, приведём решения, полученные однородным методом максимума совместности и неоднородным:

Метод	$tolmax$	$argmax$	α	β
Однородный	0.1368	$(0.7479, -1.064)^\top$	2.1125	-1.0641
Неоднородный	0.9999	$(0.69315, -1)^\top$	2	-1

Для вычислений использовались программы `tolsolvty` и `tolsolvty_m`.

Эксперимент 2:

данные задачи

Пусть точное значение функции не соответствует серединам интервалов.

Введём $\underline{E} = 0.05$ и $\overline{E} = 0.1$.

Рассмотрим интервалы $[y_i - \underline{E}, y_i + \overline{E}]$.

Интервалы возможных значений

$$\mathbf{y}_1 = [0.6858, 0.8358], \quad \mathbf{y}_2 = [0.2207, 0.3707].$$

Средины данных интервалов $m_1 = 0.7608$ и $m_2 = 0.2957$ соответственно.

Эксперимент 2:

выбор специальных коэффициентов

Разобьём интервалы относительно середины:

$$[m_i - \underline{E}, m_i], \quad [m_i, m_i + \overline{E}].$$

В качестве компенсирующих переменных возьмём:

$$\underline{\ell}_i = \frac{1}{\text{wid } \ln[m_i - \underline{E}, m_i]}, \quad \bar{\ell}_i = \frac{1}{\text{wid } \ln[m_i, m_i + \overline{E}]}, \quad i = 1, 2.$$

Эксперимент 2:

решение задачи

Полученное решение внесено в таблицу

Метод	$tolmax$	$argmax$	α	β
Однородный	0.098902	$(0.69512, -0.97339)^\top$	2.004	-0.97339
Неоднородный	1	$(0.67164, -0.94503)^\top$	1.9574	-0.94503

Для оценки точности решения приведём значения абсолютных погрешностей:

$$R = (0.0039523, 0.026611)^\top, \quad R_\ell = (0.042554, 0.054975)^\top.$$

Заключение

- Предложен неоднородный метод максимума совместности. С его помощью можно учитывать и компенсировать изменения метрики пространства при нелинейных преобразованиях.
- Существующие программы `tolsovlty` и `tolinprog`, реализующие метод максимума совместности, модифицированы для вычисления максимума неоднородного распознающего функционала (они названы `tolsovlty_m` и `tolinprog_m` соответственно).
- Опыт решения тестовых задач показывает, что неоднородный метод максимума совместности даёт хорошие результаты в случае, когда умеем точно подобрать весовые коэффициенты $\underline{\ell}$ и $\bar{\ell}$.

В частности, для хорошей настройки неоднородного метода максимума совместности важно знать положение истинного значения и уровень погрешности. Хорошие результаты достигаются для интервалов, середины которых близки к истинным значениям.

«Несмещённые интервальные данные»?

— середина интервала совпадает
с истинным значением измеряемой величины

$\approx$ отсутствие систематических погрешностей

Спасибо за внимание!