

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА ГРАФАХ

А.В. Пролубников

Омский государственный университет

a.v.prolubnikov@mail.ru

18.05.26

ЗАДАЧА ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ (ДО)

Дано:

- дискретное множество допустимых решений $\mathcal{D}$,
- целевая функция $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Найти: такое $\hat{x} \in \mathcal{D}$, что

$$f(\hat{x}) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x), \quad (1)$$

$$(f(\hat{x}) = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)).$$

Оптимальное решение задачи ДО — это пара $(\hat{x}, f(\hat{x}))$:
решение + значение целевой функции на нём.

ЗАДАЧИ ДО НА (ГИПЕР-)ГРАФАХ:

Дано:

- $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.
- $w(e) > 0$ — это *вес (стоимость)* ребра $e \in E$, $w_i = w(e_i)$.
- Двоичный вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ задаёт множество $E_x \subset E$:
 $x_i = 1$, если $e_i \in E_x$, $x_i = 0$, если $e_i \in E \setminus E_x$.
- Дано множество допустимых решений $\mathcal{D}$.

Найти: $\hat{x} \in \mathcal{D}$ такой, что

$$f(\hat{x}, w) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x, w),$$

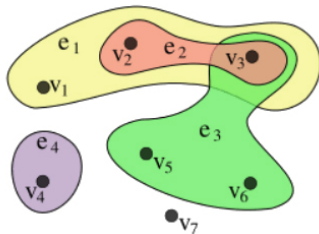
где

$$f(x, w) = \sum_{e \in E_x} w(e) = \sum_{i=1}^n w_i x_i. \quad (2)$$

ЗАДАЧИ ДО НА (ГИПЕР-)ГРАФАХ:

Гиперграф —

- множество вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$;
- множество *гипер-рёбер*: рёбро состоит из произвольного количества вершин $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, $e_i = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$.



$e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_5, v_6\}$, $e_4 = \{v_4\}$.

v_7 не покрыта ни одним ребром в гиперграфе.

Далее: Задача о покрытии множества — это задача о рёберном покрытии гиперграфа.

ЗАДАЧИ ДО НА ГРАФАХ:

- Множество E — множество рёбер (гипер-)графа $G = \langle V, E \rangle$;

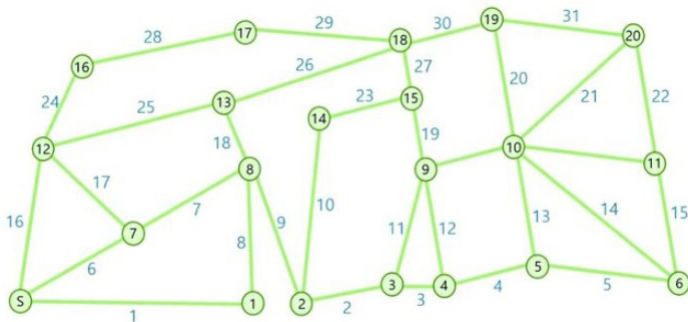
- Множество допустимых решений $\mathcal{D}$

— множество подграфов G заданного вида:

- пути в графе,
- остовные деревья,
- гамильтоновы циклы,
- паросочетания,
- разрезы

и др.

ЗАДАЧИ ДО НА ГРАФАХ



— взвешенный граф, точечные веса рёбер.

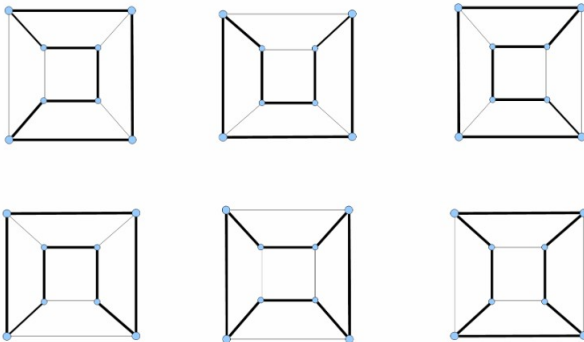
s — начальная вершина.

ДОПУСТИМЫЕ ПОДГРАФЫ

— ДОПУСТИМЫЕ РЕШЕНИЯ

Найти: гамильтонов цикл минимального веса во взвешенном кубическом графе.

$\mathcal{D}$ — множество гамильтоновых циклов в кубическом графе:

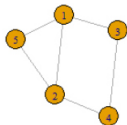


(каждое ребро имеет какой-то вес)

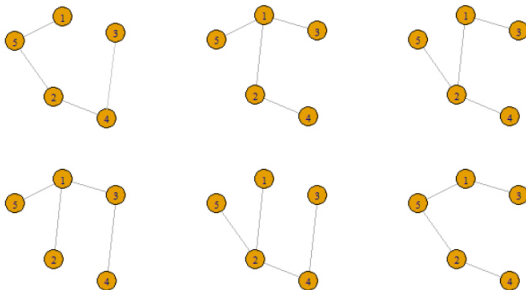
ДОПУСТИМЫЕ ПОДГРАФЫ

— ДОПУСТИМЫЕ РЕШЕНИЯ

Найти: остовное дерево минимального веса в графе



$\mathcal{D}$ — множество остовных деревьев в этом графе:



ЗАДАЧИ ДО НА ГРАФАХ:

- задача о кратчайшем пути в графе,
- задача о самом длинном пути в ориентированном графе,
- задача об остовном дереве минимального веса,
- задача о вершинном и рёберном покрытиях графа,
- задача коммивояжёра (задача о гамильтоновом цикле минимального веса),
- задача о паросочетаниях,
- задача о назначениях (может быть поставлена как задача о покрытии)

и др.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ В СЕТЯХ

Системы реального времени — необходимо многократно пересчитывать оптимальное (приближённое) решение.

1. Маршрутизация в сетях передачи данных

Вес ребра — время доставки, метрика маршрута, вычисляемая по нескольким параметрам (например, пропускная способность, задержка, надёжность и др.)

- пересчёт кратчайших путей в сетях маршрутизаторов.

2. Заводской робот-манипулятор

— конвейер, управляемый ПЛК, — *граф обработки* детали:

- 1000 операций в час;
- для каждой новой детали может потребоваться свой маршрут обхода графа обработки.

ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ В СЕТЯХ

3. Uber, Яндекс.Навигатор, доставка еды

Вес ребра — время проезда — обновляется каждые 30-60 сек.

- пересчёт кратчайших путей в дорожных сетях, динамическое ценообразование.

4. Управление распределёнными вычислениями

- *вершины* — серверы, пользователи;
- *рёбра* — каналы связи.

Меняется загрузка серверов, пропускная способность каналов.

Вес ребра — обновляется в течение нескольких десятки раз в минуту.

ДРУГИЕ ЗАДАЧИ:

- задачи управления проектами с заданной очередностью выполнения;
- арбитражные цепочки на валютных рынках;
- выявление сообществ в социальных сетях;
- активация сенсоров с целью покрытия определённой территории (неопределённость весов: помехи, разряд батарей, физические препятствия);

...

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ГРАФАХ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ В СИТУАЦИЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ситуации принятия решений:

- ситуации полной определённости;
- ситуации, в которых присутствует риск;
- ситуации с неопределённостью.

(R.D. Luce, H. Raiffa, Games and Decisions: Introduction and Critical Survey, John Wiley and Sons, New York, 1957.)

НЕОБХОДИМА

**модель принятия решений
в ситуации с неопределённостью.**

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ В СИТУАЦИЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

При наличии значительной неопределённости в данных ни модели детерминированной (точечной) оптимизации, ни стохастические подходы, как правило, НЕ МОГУТ БЫТЬ ПРИМЕНЕНЫ, поскольку

- дают оптимистичные и неустойчивые решения;
 - требуют знания распределений, которые часто недоступны или неточны.
-
- S.K. Gupta, J. Rosenhead, *Robustness in sequential investment decisions* // Management Science, 1968, 15(2), B-18–B-33.
 - J.K. Sengupta, *Robust estimation and testing under data uncertainty* // In: Dynamic Optimization and Mathematical Economics, Springer. 1991, 145–168.
 - P. Kouvelis, G. Yu, *Robust Discrete Optimization and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers. 1997.

и др.

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ В СИТУАЦИЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

- *Неточное задание весов рёбер моделируется интервалами их возможных значений.*
- *Ищется оптимальное решение в соответствии с некторой концепцией оптимальности (среднее решение, множество Парето, робастное решение, объединённое множество решений...).*

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДО:

Как сильно меняется оптимальное решение
(приближённое с гарантированной точностью)
при *возможных* значениях весов?

ЗАДАЧИ ДО С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ВЕСАМИ (ИДО)

Интервальная целевая функция

Целевая функция вида

$$f(x, \mathbf{w}) = \sum_{e \in E_x} \mathbf{w}(e) = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i x_i, \quad (3)$$

где $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}(e_i) \in \mathbb{IR}_+$ интервалы возможных значений w_i .

Сценарий — это вектор $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$
— возможные значения коэффициентов функции (2)

- **слабое оптимальное решение** — это решение $\hat{x} \in \mathcal{D}$ оптимальное для некоторого сценария.
- **слабое приближённое решение с точностью α , $\alpha > 1$,**
— это $\tilde{x} \in \mathcal{D}$ т.ч. для некоторого сценария c $f(\tilde{x}, w) \leq \alpha f(\hat{x}, w)$,

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ИДО:

- поиск сильного решения — оптимального при всех сценариях;
- нахождение решений для некоторого множества сценариев;
- стохастическая оптимизация;
- нахождение множества Парето;
- робастная оптимизация;
- нахождение объединённых множеств решений:
 - оптимальных решений,
 - приближённых решений.
- нечёткая оптимизация;

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ:

- Как можно менять сценарий, чтобы для получаемой задачи получать решение, используя решение исходной?
- Как оценить количество таких сценариев?
- Как неточность во входных данных влияет на структуру множества решений?

РОБАСТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

РОБАСТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

— поиск наиболее устойчивого решения:

- абсолютно робастное решение —

$$\max_{w \in \mathbf{W}} f(\tilde{x}, w) = \min_{x \in \mathcal{D}} \max_{w \in \mathbf{W}} f(x, w)$$

— (критерий Вальда)

- относительно робастное решение —

$$\max_{w \in \mathbf{W}} (f(\tilde{x}, w) - f^*(w)) = \min_{x \in \mathcal{D}} \max_{w \in \mathbf{W}} (f(x, w) - f^*(w)),$$

где $f^*(w)$ — вес оптимального решения для сценария w
(критерий Сэвиджа)

Ищется только одно решение.

Учитываются только “плохие” сценарии, которых может быть мало.

Задачи из класса **P** при интервализации, как правило,
становятся **NP**-трудны.

АНАЛИЗ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Теорема. x — слабое решение $\Leftrightarrow x$ имеет минимальный вес при минимальных весах всех рёбер из x и максимальных весах оставшихся.

Теорема. x — сильное решение $\Leftrightarrow x$ имеет максимальный вес при максимальных весах всех рёбер из x и минимальных весах оставшихся.

Сильное решение — это устойчивое решение (наилуший вариант при всех критериях).

Проверка на предмет того, является ли слабое решение сильным, полиномиальна.

Но сильного решения почти всегда нет.

АНАЛИЗ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Если веса интервальные, то абсолютно наихудший сценарий для всех слабых решений — это сценарий, когда веса всех рёбер максимальны.

⇒ абсолютное робастное решение может быть найдено за полиномиальное время.

Для конечного набора сценариев ситуация хуже, чем для множества сценариев, заданного интервалами!

(Даже два сценария могут делать задачу не полиномиально разрешимой).

Вопрос о вычислительной сложности нахождения относительного робастного решения открыт.

АНАЛИЗ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Слабые и сильные рёбра:

- *слабое ребро* — входит во все слабые решения;
- *сильное ребро* — входит во все слабые решения.

Теорема. $e \in E$ — слабое ребро $\Leftrightarrow$ существует MST с этим ребром при его минимальном весе и максимальном весе остальных рёбер.

Теорема. $e \in E$ — сильное ребро $\Leftrightarrow$ существует MST с этим ребром при его максимальном весе и минимальном весе остальных рёбер.

Покрытие мин. ост. деревьями — это объединённое множество решений.

— как и в задачах с конечным набором сценариев,
но без радиуса устойчивости.

Теорема. $e \in E$ — сильное ребро $\Leftrightarrow$ принадлежит всем MST из покрытия.

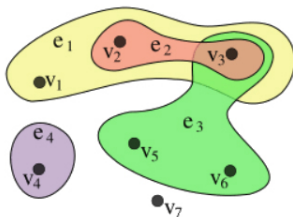
АНАЛИЗ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Почему задачи с интервальными множествами сценариев (*брусами сценариев*) могут оказываться менее вычислительно сложными, чем задачи с дискретными множествами сценариев?

Для решения необходимо рассмотреть решения при весах в вершинах бруса $\mathbf{w}$. И хотя их количество также растёт экспоненциально с n , но менее быстро.

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА (ЗПМ)

Гиперграф —



Покрытие — это какой-то набор взвешенных гипер-рёбер, покрывающих все вершины в графе.

Найти: покрытие минимального веса в графе.

$\mathcal{D}$ — все допустимые покрытия.

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА

Дано: $U = \{1, \dots, m\}$; $S = \{S_1, \dots, S_n\}$, $S_i \subseteq U$: $\cup_{i=1}^n S_i = U$.

$C = \{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\}$ — покрытие U , если $\cup_{j=1}^k S_{i_j} = U$.

Функция веса: $w : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, $w_i = w(S_i)$ — вес множества S_i

Найти: покрытие C минимального веса:

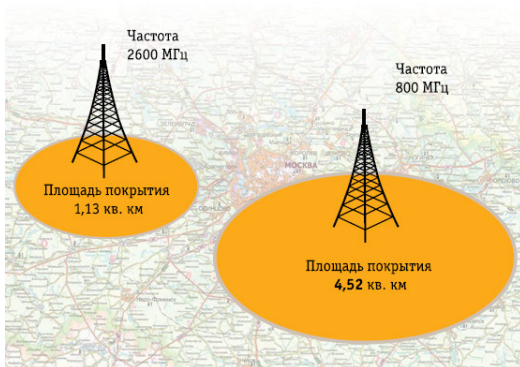
$$w(C) = \sum_{j=1}^k w(S_{i_j}) \rightarrow \min$$

Каждому покрытию C соответствует вектор $x \in \{1, 0\}^n$:

$$x_i = 1 \Leftrightarrow S_i \in C.$$

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА

Например, вышка задаёт *ребро гиперграфа*,
потребители — это *вершины*.



Вес ребра (стоимость установки вышки) — определяется областью покрытия, параметрами вышки, погодными условиями, рельефом местности и т.д.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА

ЗПМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ВЕСАМИ (ИЗПМ)

Дано: $U = \{1, \dots, m\}$; $S = \{S_1, \dots, S_n\}$, $S_i \subseteq U : \bigcup_{i=1}^n S_i = U$

$$C = \{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\} \text{ — покрытие } U, \text{ если } \bigcup_{j=1}^k S_{i_j} = U$$

Интервальная функция веса $w : C \rightarrow \mathbb{R}_+$
($\mathbb{R}_+ = \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{R} : \underline{x} \geq 0\}$)

- *Слабое оптимальное решение* — это решение оптимальное при некотором сценарии $w \in \mathbf{w}$.
- *Сильное оптимальное решение* — это решение оптимальное при любом сценарии $w \in \mathbf{w}$.

ОБЪЕДИНЁННЫЕ РЕШЕНИЯ

СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ, КАК ПРАВИЛО, НЕТ.

Объединённое оптимальное решение Ξ :

Ξ — это набор слабых оптимальных решений

$$\Xi = \{x \mid (\exists w \in \mathbf{w})(f(x, w) = \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w))\}.$$

Объединённое приближённое решение $\tilde{\Xi}_\alpha$:

$\tilde{\Xi}_\alpha$ — набор α -приближённых решений для всех сценариев из $\mathbf{w}$:

$$\tilde{\Xi}_\alpha = \{x \in \mathcal{D} \mid (\exists w \in \mathbf{w})(f(x, w) \leq \alpha \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w))\}.$$

ОБЪЕДИНЁННОЕ РЕШЕНИЕ

ИЗПМ — задача нахождения Ξ или $\tilde{\Xi}_\alpha$.

Требуется (в случае нахождения Ξ):

- 1) найти $\Xi = \{C_1, \dots, C_k\}$;
- 2) оценить (найти) $\mathbf{w}_{C_i}$ — множеств сценариев, для которых они оптимальны;
- 3) если веса множеств понимаются как случайные величины (с *равномерным* распределением), принимающие значения $w \in \mathbf{w}_i$, и заданы распределения вероятностей сценариев w на $\mathbf{w}_i$, то определить вероятности сценариев, при которых эти покрытия являются оптимальными.

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА *NP*-ТРУДНА

⇒ Необходимо искать приближённые решения с гарантированной точностью (используя *интервальный жадный алгоритм*).

Жадный алгоритм

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ (точечный)

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗПМ

- 1 $Gr := \emptyset$.
- 2 if Gr — покрытие U ,
- 3 работу алгоритма завершить.
- 4 else выбрать q т.ч.
$$w_q/|S_q| = \min \left\{ w_i/|S_i| : S_i \in S \text{ и } S_i \not\subset \bigcup_{j \in Gr} S_j \right\},$$
- 5 $Gr := Gr \cup \{S_q\}$,
- 6 $\forall i : S_i := S_i \setminus S_q$.
- 7 Перейти на шаг 2.

Вычислительная сложность: $O(nm^2)$.

ОБЪЕДИНЁННОЕ РЕШЕНИЕ

Гарантированная точность:

$$\frac{w(Gr)}{w(Opt)} \leq H(m) \leq \ln m + 1,$$

где $H(m) = \sum_{k=1}^m 1/k$, Gr — жадное покрытие, Opt — оптимальное.

V. Chvatal, *A greedy heuristic for the set-covering problem* // Mathematics of Operation Research. 1979; 4 (3):233–235.

**ОЦЕНКА $O(\ln m)$ НЕУЛУЧШАЕМА
ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ!**
(при условии $P \neq NP$)

**ЕСЛИ $\mathcal{D}$ — МАТРОИД,
ТО ПОЛУЧАЕМ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ.**

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ВЕСАМИ РЁБЕР

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДО

УСТОЙЧИВОСТЬ при изменении w :

- по вероятности,
- по целевой функции.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДО

УСТОЙЧИВОСТЬ при изменении w :

- по вероятности,
- по целевой функции.

- Решение x *устойчиво по вероятности*, если $P(x) \geq c > 0$.

— вероятность получения x как оптимального (приближённого) решения для сценариев $w \in \mathbf{w}$ превышает *пороговое значение* c .

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДО

УСТОЙЧИВОСТЬ при изменении w :

- по вероятности,
- по целевой функции.

- Решение x *устойчиво по вероятности*, если $P(x) \geq c > 0$.

— вероятность получения x как оптимального (приближённого) решения для сценариев $w \in \mathbf{w}$ превышает *пороговое значение* c .

- Решение x *устойчиво по целевой функции*, если при малых изменениях сценариев $w \in \mathbf{w}$ мало меняется значение $f(x, w)$.

Насколько велик разброс Δ возможных значений целевой функции для получаемых решений при изменении сценария?

$$\Delta = \max_{\substack{x, y \in \Xi \\ w_1, w_2 \in \mathbf{w}}} |f(x, w_1) - f(y, w_2)|,$$

x, y — оптимальные (приближённые) решения для сценариев w_1, w_2 .

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

Опр. Решение *устойчиво* для сценария w , если существует открытый шар B_ρ , $\rho > 0$, в котором оно оптимально.

Теорема. Решение *устойчиво* для сценария $w \Leftrightarrow$ оно единственно при нём.

Теорема. Оптимальное решение для сценария $w \Leftrightarrow$ почти всегда единственно.

- Е.Н. Гордеев, Л.И. Липкин, *Об единственности оптимального решения в задачах дискретной оптимизации* // Дискретный анализ, Новосибирск, 1990.

РАДИУС УСТОЙЧИВОСТИ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДО

УСТОЙЧИВОСТЬ — нечувствительность решения задачи к изменениям входных данных — к *изменениям весов рёбер графа*

При каких минимальных изменениях весов оптимальное решение перестаёт быть оптимальным?

Опр. *Радиус устойчивости* — минимальное по норме возмущение, при котором текущее решение перестаёт быть оптимальным:

$$\rho(x, w) = \sup\{\varepsilon \geq 0 \mid x \text{ — оптимальное при } \|\Delta w\| \leq \varepsilon\},$$

то есть при w' т.ч. $\|w - w'\| \leq \varepsilon$.

$\rho(x, w) = 0$ — есть *альтернативные* решения $\Rightarrow x$ неустойчиво.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДО

УСТОЙЧИВОСТЬ — нечувствительность решения задачи к изменениям входных данных — к *изменениям весов рёбер графа*

При каких минимальных изменениях весов оптимальное решение перестаёт быть оптимальным?

Опр. *Радиус устойчивости* — минимальное по норме возмущение, при котором текущее решение перестаёт быть оптимальным:

$$\rho(x, w) = \sup\{\varepsilon \geq 0 \mid x \text{ — оптимальное при } \|\Delta w\| \leq \varepsilon\},$$

то есть при w' т.ч. $\|w - w'\| \leq \varepsilon$.

Аналогично для приближённых решений: *минимальное по норме возмущение, при котором текущее решение не имеет заданной (гарантированной) точности.*

РАДИУС УСТОЙЧИВОСТИ

Задача.

Найти *покрытие* множества возможных сценариев $\mathbf{w}$ *шарами* устойчивости $B_\rho(w^{(i)})$ радиуса ρ с центрами $w_c = \{w^{(1)}, \dots, w^{(m)}\}$:

$$(\forall w \in \mathbf{w})(w \in B_\rho(w^{(i)}))$$

для некоторого $\tilde{w} \in w_c$.

Рассматриваются *дискретные* множества возможных сценариев $\mathbf{w}$.

РАДИУС УСТОЙЧИВОСТИ

- В.К. Леонтьев, *Устойчивость в задаче коммивояжёра* // Журнал вычислительной математики и математической физики», 1975, 15(6), 1298–1309.
- В.К. Леонтьев, *Об устойчивости в задачах комбинаторного выбора* // Доклады Академии наук СССР, 1976, 226(1), 23–25.
- В.К. Леонтьев, *Качественное исследование траекторных задач* // Кибернетика. 1986. 5. 82–89.
- Е. Н. Гордеев, В. К. Леонтьев, *Об оценке сложности табулирования траекторных задач* // // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1985, 25(8). 1272–1275.

РАДИУС УСТОЙЧИВОСТИ

Теорема. Не существует конечного и даже счётного покрытия шарами устойчивости для нулевых весов и $\rho = 1$.

Тем не менее:

Теорема. $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное ε -покрытие:

$$\left| \mu(w \in B_1(0) \mid (\exists \tilde{w} \in w_c)(w \in \overline{B}_1(\tilde{w}))) - \right. \\ \left. - \mu(w \in B_1(0) \mid (\nexists \tilde{w} \in w_c)(w \in \overline{B}_1(\tilde{w}))) \right| < \varepsilon,$$

— лебегова мера непокрытой шарами устойчивости части единичного шара мала.

Опр. *Устойчивое ядро* — множество (рёбер, вершин), входящих во все оптимальные решения.

— не меняется при малых возмущениях.

РЕБРО ИЗ ЯДРА — ОБЩАЯ ЧАСТЬ ВСЕХ РЕШЕНИЙ

Ядро может быть использовано для динамического достраивания решения при определённом сценарии.

Множество Парето и объединённые множества решений
дают информацию о ядре.

АНАЛИЗ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Слабые и сильные рёбра (— ЯДРО):

- *слабое ребро* — входит во все слабые решения;
- *сильное ребро* — входит во все слабые решения.

Теорема. $e \in E$ — слабое ребро $\Leftrightarrow$ существует MST с этим ребром при его минимальном весе и максимальном весе остальных рёбер.

Теорема. $e \in E$ — сильное ребро $\Leftrightarrow$ существует MST с этим ребром при его максимальном весе и минимальном весе остальных рёбер.

Покрытие мин. ост. деревьями — это объединённое множество решений.

— как и в задачах с конечным набором сценариев,
но без радиуса устойчивости.

Теорема. $e \in E$ — сильное ребро $\Leftrightarrow$ принадлежит всем MST из покрытия.

ЗАДАЧА О САМОМ ДЛИННОМ ПУТИ

- (1) H. Yaman, O.E. Karasan, M.C. Pinar, *Minimum spanning tree problem with interval data*. Technical Report 9909, Department of Industrial Engineering, Bilkent University, Ankara, Turkey. 1999: 16.
- (2) H. Yaman, O.E. Karasan, M.C. Pinar, *Longest path problem with interval data*. Technical Report 9908, Department of Industrial Engineering, Bilkent University, Ankara, Turkey. 1999: 31.

Работа (2) во многом — “калька” с работы (1): результаты могут быть распространены на многие задачи оптимизации на графах с интервальными весами:

- Tran Quang Quy et al. *The minmax regret longest path of a tree with interval edge lengths* // Springer. Discrete optimization with interval data. 2023. 61–79.

— полиномиально разрешимый частный случай

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ:

[Libura]: *Допуск на вес (edge tolerance)* — как сильно может быть изменено одно ребро при том, что решение остаётся оптимальным.

Задача нахождения допуска.

Дан гамильтонов цикл x в графе G . Для $e \in E$ найти интервал $w(e)$ т.ч. x — оптимален для любого возмущённого графа G' , в котором $w'(e) \in w(e)$.

Теорема. Задачи нахождения

- допусков,
- радиуса устойчивости

— NP-трудны

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ:

Теорема. Допуск ребра e зависит от разницы в стоимости между оптимальным решением и лучшим решением, не содержащим e :

$$\text{tol}(e) \geq f(x, w) - f(x^*, w).$$

$\Rightarrow$

Теорема. При любом конечном k , имея k наилучших решений, мы можем иметь только нижние оценки допусков и радиусов устойчивости.

ОБЪЕДИНЁННЫЕ РОБАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

André Chasseina, Marc Goerigk. *Compromise solutions for robust combinatorial optimization with variable-sized uncertainty* // European Journal of Operational Research, 2018.

Параметризация неопределённости:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \lambda \mathbf{B},$$

$\mathbf{B}$ — брус в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^n$, с центром в 0.

Задача.

Найти множество *слабых робастных решений*, которые для любого параметра λ содержали бы робастное решение.

$f^*(\lambda)$ — кусочно линейна, выпукла, точки излома могут быть найдены за полиномиальное время.

ОБЪЕДИНЁННЫЕ РОБАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Прямая задача. Как меняется оптимальное решение при росте размера неопределённости λ ?

Обратная задача. Каково минимальное значение λ , при котором данное решение остаётся оптимальным (допустимым)?

— полиномиальна разрешимы

ВЫВОД: Для параметризуемых интервалов зависимость оптимального решения от *размера неопределённости* может быть проанализирована:

ОБЪЕДИНЁННЫЕ РОБАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

- A. Chassein, M. Goerigk, *Compromise solutions for robust combinatorial optimization with variable-sized uncertainty* // European Journal of Operational Research, 2018.
- T. Dokka, M. Goerigk, R. Roy, *Mixed Uncertainty Sets for Robust Combinatorial Optimization* // ArXiv.org, 2019.
<https://arxiv.org/pdf/1812.04895>
- ...
- глава A. Chasseina, M. Goerigk *Performance Analysis in Robust Optimization*
в сборнике статей Robustness Analysis in Decision Aiding, Optimization, and Analytics
Springer International Publishing.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-33121-8>
Doumpos, M., Zopounidis, C., Grigoroudis, E. (Eds.). (2016).

ВЕРОЯТНОСТЬ РЕШЕНИЯ

ВЕРОЯТНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Вероятность $P(x)$ оптимального (приближённого) решения x — это вероятность получения сценария $w \in \mathbf{w}$, при котором x оптимальное (приближённое с гарантированной точностью).

$$P(x) = \int_{\mathbf{w}_x} p(w) dw,$$

где $p(w)$ — функция плотности, $\mathbf{w}_x \subseteq \mathbf{w}$ — множество сценариев, при которых x — оптимальное (приближённое) решение.

$$\begin{aligned} \rho(x, w) > 0 &\Leftrightarrow \mathbf{w}_x \text{ содержит шар } B_{\rho(x, w)}(w), \text{ в котором } x \text{ — решение} \\ &\Leftrightarrow \text{вероятность } P(x) > 0 \end{aligned}$$

1. Оценивание/нахождение вероятности решения:

- I. Averbakh, O. Lebedev, *On the complexity of minmax regret spanning tree problems* // Operations Research Letters, 2005, 33(6), 643–649.

Хотя основной фокус на сложности, вводится понятие *областей оптимальности* в пространстве весов. “Объём таких областей может служить мерой “надёжности” решения.”

- A. Kasperski, P. Zieliński, *Minmax regret combinatorial optimization problems: an algorithmic perspective*, RAIRO – Operations Research, 2011.

Обсуждается связь между мощностью спектра решений и структурой пространства сценариев.

Упоминается возможность использования геометрической вероятности (меры Лебега) для оценки значимости решений

- А.В. Пролубников, *Задача о покрытии множества с интервальными весами подмножеств и жадный алгоритм её решения* // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 6. С. 70–84.
- А.В. Пролубников, *Об одном подходе к решению задачи о покрытии с интервальными весами и его вычислительной сложности* // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 2. С. 115–126.
- A.V. Prolubnikov, *The interval greedy algorithm for discrete optimization problems with interval objective function* // arXiv.org, 2022. <https://arxiv.org/pdf/2003.01937>
- A.V. Prolubnikov, *On the representativeness of approximate solutions of discrete optimization problems with interval cost function* // arXiv.org, 2022. <https://arxiv.org/pdf/2201.00182>

2. Оценивание вероятностей решений с помощью имитационного моделирования (методов Монте Карло):

- 1) Сгенерировать N случайных сценариев из w .
- 2) Для каждого сценария решить задачу оптимизации.
- 3) Оценить вероятность каждого полученного решения как $P(x) = N_x / N$, где N_x — количество сценариев, при которых получено x , интервалы возможных значений f для них и др.

- Г.Л. Козина, *Правило выбора решений оптимизационных задач на графах с интервальными параметрами.* // Труды XVIII Байкальской международной школы-семинара. Иркутск-Северобайкальск, 2–8 июля 2005 г. 2005, (4), 51–55.

ОБЪЕДИНЁННЫЕ ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ

ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ

— решения, полученные с помощью какого-либо *полиномиального* алгоритма.

Исследуются:

- распределение на множестве решений;
- распределение на множестве значений целевой функции;
- нахождения ядра и наиболее вероятных рёбер, входящих в решение;
- и др.

Даже при узких интервалах весов количество возможных решений может расти экспоненциально от n .

Количество приближённых решений растёт ЕЩЁ быстрее.

В основном рассматриваются ОПТИМАЛЬНЫЕ решения.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ решения рассматриваются существенно реже.

ИЗПМ:

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}\},$$

где

$$S_1 = \{3, 5\}, S_2 = \{4, 6\}, S_3 = \{1, 3\}, S_4 = \{2, 3, 4\}, S_5 = \{1, 5, 6\},$$

$$S_6 = \{4, 5, 6\}, S_7 = \{1, 4, 6, 7\}, S_8 = \{1, 3, 4, 6\}, S_9 = \{2, 4, 5, 7\},$$

$$S_{10} = \{1, 3, 6, 7\}, S_{11} = \{1, 2, 4, 6\}.$$

$$w_\mu = (119, 117, 124, 135, 128, 130, 143, 144, 144, 142, 141)$$

Относительная ошибка измерений не больше 5%:

$$w_i = [w_{\mu,i} - \Delta w, w_{\mu,i} + \Delta w],$$

где $w_{\mu,i}$ — i -я компонента w_μ , $\Delta w = 5$.

Множество слабых приближённых решений $\tilde{\Xi} = \{Gr_i\}_{i=1}^{\overline{1,7}}$,
интервалы возможных потерь для них $w(Gr_i)$, их вероятности $P(Gr_i)$:

- 1) $Gr_1 = \{S_1, S_4, S_7\}$, $w(Gr_1) = [382, 410]$, $P(Gr_1) = 0.1542$;
- 2) $Gr_2 = \{S_1, S_7, S_9\}$, $w(Gr_2) = [391, 410]$, $P(Gr_2) = 0.0007$;
- 3) $Gr_3 = \{S_1, S_7, S_{11}\}$, $w(Gr_3) = [390, 410]$, $P(Gr_3) = 0.1342$;
- 4) $Gr_4 = \{S_8, S_9\}$, $w(Gr_4) = [278, 295]$, $P(Gr_4) = 0.1172$;
- 5) $Gr_5 = \{S_9, S_{10}\}$, $w(Gr_5) = [278, 293]$, $P(Gr_5) = 0.3166$;
- 6) $Gr_6 = \{S_1, S_9, S_{11}\}$, $w(Gr_6) = [389, 417]$, $P(Gr_6) = 0.0826$;
- 7) $Gr_7 = \{S_1, S_{10}, S_{11}\}$, $w(Gr_7) = [387, 417]$, $P(Gr_7) = 0.1946$.

$Gr_\mu = Gr_1 = \{S_1, S_4, S_7\}$ для сценария w_μ , $f(Gr_\mu, w_\mu) = 397$.

- для решения “в среднем”: $P(Gr_\mu) = 0.1542$;
- наиболее вероятное решение — Gr_5 , $P(Gr_5) = 0.3166$.

Распределение весов возможных ОПТИМАЛЬНЫХ решений на множестве всех сценариев

Возможные оптимальные решения:

- $Opt_1 = Gr_4 = \{S_8, S_9\};$
- $Opt_2 = Gr_5 = \{S_9, S_{10}\}.$
- $f(Opt, w) \in [276, 296]$ для всех $w \in \mathbf{w}.$
- $P(Opt_2) = 0.667$, т.е. решение для средних весов имеет наибольшую вероятность.
- Отклонение от среднего веса равно 10:

$$\max_{\substack{w \in \mathbf{w} \\ \hat{x} \in \Xi}} |f(\hat{x}_\mu, w_\mu) - f(\hat{x}, w)| = 10. \quad (4)$$

Распределение весов возможных ПРИБЛИЖЁННЫХ решений на множестве всех сценариев

$f(\tilde{x}^{(i)}, w) \in [276, 417]$ для $w \in \mathbf{w}$.

- средний вес возможного приближённого решения равен 350.51:

$$\sum_{\tilde{x} \in \tilde{\Xi}} P(\tilde{x}) \cdot \frac{\underline{\mathbf{w}}(\tilde{x}) + \overline{\mathbf{w}}(\tilde{x})}{2} \approx 350.51.$$

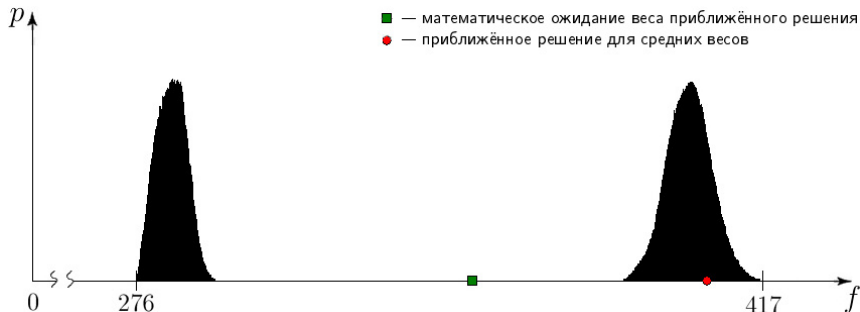
- $f(\tilde{x}_\mu, w_\mu) = 397$.

Значительное отклонение от среднего веса приближённых решений по всем сценариям из $\mathbf{w}$:

$$\max_{\substack{w \in \mathbf{w} \\ \tilde{x} \in \tilde{\Xi}}} |f(\tilde{x}_\mu, w_\mu) - f(\tilde{x}, w)| = 121. \quad (5)$$

Распределение весов возможных ПРИБЛИЖЁННЫХ решений на множестве всех сценариев

ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫ



Гистограмма частот весов возможных приближённых решений

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УСТОЙЧИВЫ



Гистограмма частот весов возможных оптимальных решений

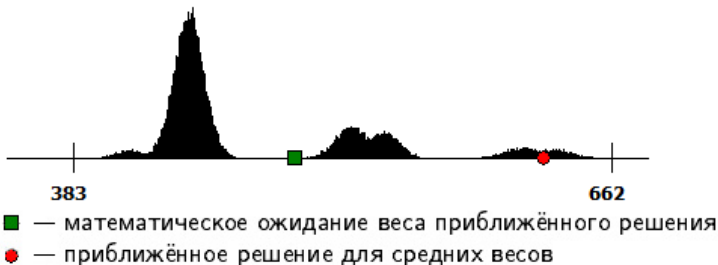
Вероятности оптимальных решений

- $m = 10$, $n = 34$ (кол-во рёбер);
- 7 оптимальных решений;
- $P_{\max} \approx 0.87$;
- $P_{\mu} \approx 0.14$;

$P_{\max}$ — максимум $P(x)$ по всем $x \in \Xi$

P_{μ} — среднее значение $P(x)$ по всем $x \in \Xi$ для задачи

ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫ



Гистограмма частот весов возможных приближённых решений

Вероятности приближённых решений

- $m = 10$, $n = 34$ (кол-во рёбер);
- 34 приближённых решения;
- $P_{\max} \approx 0.42$;
- $P_{\mu} \approx 0.01$;

$P_{\max}$ — максимум $P(\tilde{x})$ по всем $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$

P_{μ} — среднее значение $P(\tilde{x})$ по всем $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$ для задачи

Вероятности приближённых решений

MP_μ and $MP_{\max}$:

- P_μ — среднее значение $P(\tilde{x})$ по всем $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$ для задачи
- $P_{\max}$ — максимум $P(\tilde{x})$ по всем $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$

- MP_μ — среднее значение P_μ по всем сгенерированным задачам размерности m
- $MP_{\max}$ — среднее значение $P_{\max}$ для них

m	MP_μ	$MP_{\max}$
100	0.0554	0.3675
200	0.0214	0.2636
300	0.0128	0.2235
400	0.0092	0.1984
500	0.0071	0.1794
600	0.0055	0.1656
700	0.0049	0.1603
800	0.0040	0.1498
900	0.0036	0.1420
1000	0.0033	0.1378

ВЫВОДЫ

- Задачи проверки решений на устойчивость для всех подходов, как правило, труднорешаемы:
 - нахождение радиуса устойчивости,
 - нахождение области устойчивости,
 - нахождение допусков.
- *Оптимальные решения* при малых пороговых значениях (малой неопределённости), как правило,
 - устойчивы по целевой функции,
 - устойчивы по вероятности.
- *Приближённые решения* при малых пороговых значениях (малой неопределённости), вообще говоря,
 - НЕ устойчивы по целевой функции,
 - НЕ устойчивы по вероятности.