МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет: Механико-математический факультет
Кафедра: Математического моделирования
Направление подготовки: 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Бабков Роман Ильич

Тема работы: Оптимизация интервальной оценки геометрического фактора видимости сценария пожара пролива

«К защите допущена»
Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н, проф.
Ковеня В. М. / __________
(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«____»____________ 2016г.

Научный руководитель
д.ф.-м.н
с.н.с. ИВТ СО РАН
Шарый С. П. / __________
(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«____»____________ 2016г.

Дата защиты: «____»____________ 2016г.

Новосибирск, 2016

Оглавление

Введение

Пожар пролива — это один из возможных сценариев аварии, который может возникнуть на производственном объекте. Целью данной задачи является определение величины пожарного риска аварии. Целевой метрикой для оценки риска пожара пролива является величина интенсивности теплового излучения, зависящая от геометрического фактора видимости, который мы и будем оценивать. Существует три различных способа оценки параметра пожарного риска (качественный, полуколичественный и количественный), но наилучшим в силу своей объективности является количественный. Именно количественной оценке отдаётся предпочтение при решении задачи.

Основной особенностью рассматриваемой задачи является её параметрическая неопределённость. Любые математические модели, используемые для описания аварийных процессов, имеют большое количество параметров. Также величины каждого параметра зачастую неточны, т. е. обладают неопределённостью. При анализе задачи, в большинстве случаев, известны нижняя и верхняя границы изменения каждого параметра, т. е. все параметры представлены в интервальной форме.

Поэтому для решения данной задачи будем применять интервальные методы. Решения, получаемые данными методами, всегда содержат точное решение задачи. У интервальной арифметики есть свои достоинства и недостатки, рассмотренные в Главе 1. Поэтому для решения серьёзных практических задач, таких как пожар пролива, следует значительно улучшить простейшие интервальные алгоритмы, а также сохранить все зависимости между параметрами задачи.

Глава 1

Интервальный анализ

1.1 Основы интервального анализа

Определение 1.1 ***Замкнутым интервалом*** $[a, b]$ *назовём множество действительных чисел, задаваемых как*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}. \tag{1.1}$$

Также известны и другие типы интервалов (открытые. полуоткрытые), но в данной работе под термином *интервал* всегда будем подразумевать *замкнутый интервал.*

Множество всех интервалов, определённых на вещественной оси, будем обозначать символом $\mathbb{IR}$. Для обозначения интервальных величин (интервальных сущностей) будем использовать жирный шрифт. Пусть $\boldsymbol{x}$ интервал, тогда левый (нижний) и правый (верхний) *концы* интервала обозначим $\underline{\boldsymbol{x}}$ и $\overline{\boldsymbol{x}}$ соответственно. Интервал называется *вырожденным*, если $\boldsymbol{x} = [x, x]$ или $\underline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}$. Любому действительному числу $c \in \mathbb{R}$ в соответствие поставим вырожденный интервал $[c, c]$. Два интервала $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ называются *равными*, если $\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{b}}$ и $\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{b}}$.

Определение интервала можно расширить до многомерного случая различными способами. Самым распространённым является брус. Многомерным интервалом, называемым *брусом*, является прямое произведение одномерных интервалов:

$$\boldsymbol{x} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad x_i \in \boldsymbol{x}_i \right\}. \tag{1.2}$$

Интервал характеризуется не только своими концами, но и другими параметрами. Такими параметрами, например, являются:

- *ширина* интервала $\boldsymbol{x}$

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}},$$

- *радиус* интервала $\boldsymbol{x}$

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\Big(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}\Big) = \frac{\operatorname{wid} \boldsymbol{x}}{2},$$

- *абсолютное значение* или *магнитуда* интервала $\boldsymbol{x}$

$$|\boldsymbol{x}| = \max\left\{ |\underline{\boldsymbol{x}}|, |\overline{\boldsymbol{x}}| \right\},$$

- *мигнитуда* интервала $\boldsymbol{x}$

$$\langle \boldsymbol{x} \rangle = \begin{cases} \min\left\{ |\underline{\boldsymbol{x}}|, |\overline{\boldsymbol{x}}| \right\}, & 0 \notin \boldsymbol{a}, \\ 0, & 0 \in \boldsymbol{a}, \end{cases}$$

- *середина* интервала $\boldsymbol{x}$

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\Big(\underline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{x}}\Big).$$

Расстояние на множестве интервалов задаётся следующей формулой:

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max\big\{|\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}|, |\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}|\big\}.$$

Оно обладает свойствами *неотрицательности, симметричности* и *неравенством треугольника.*

Для брусов введённые выше характеристики вычисляются покомпонентно, та или иная конкретная характеристика многомерного интервала есть вектор.

Для определения арифметических операций между интервалами, мы воспользуемся следующим фундаментальным принципом:

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} := \big\{a \star b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\big\}, \qquad \star \in \{+, -, \cdot, /\}. \tag{1.3}$$

Для работы с интервалами на ЭВМ и для вычислений нам нужны конструктивные формулы, использующие характеристики интервалов. Следующее предложение позволяет находить результат арифметической операции через концы операндов.

Предложение 1.1 *Для интервальных арифметических операций развёрну-*

тое определение, равносильное (1.3), *задаётся следующими формулами:*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[\underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}}], \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=[\underline{\boldsymbol{a}}-\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{b}}], \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\Bigl[\min\bigl\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}},\underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\bigr\},\max\bigl\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}},\underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\bigr\}\Bigr], \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot[1/\overline{\boldsymbol{b}},1/\underline{\boldsymbol{b}}]\qquad \text{для } 0\notin\boldsymbol{b}. \tag{1.7}$$

Определение 1.2 *Функция* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *называется* ***рациональной****, если она задаётся аналитическим выражением, которое является конечной комбинацией переменных* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *и констант с четырьмя арифметическими операциями.*

Теорема 1.1 (Основная теорема интервальной арифметики)
Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *— рациональная функция вещественных аргументов* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *и для неё определён результат* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ *подстановки вместо аргументов интервалов их изменения* $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n\in\mathbb{IR}$ *и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики. Тогда*

$$\bigl\{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_1\in\boldsymbol{x}_1,x_2\in\boldsymbol{x}_2,\ldots,x_n\in\boldsymbol{x}_n\bigr\}\subseteq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n), \tag{1.8}$$

т. е. интервал $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ *содержит множество значений функции* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *на* $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$.
Если выражение для функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *содержит не более чем по одному вхождению каждой переменной в первой степени, то в* (1.8) *вместо включения выполняется точное равенство.*

Возьмём рациональную функцию $f(x, y) = xy + y$, где $x \in [-2, -1]$, $y \in [2, 3]$. Применение основной теоремы интервальной арифметики к данной функции даёт следующий результат $[-2, -1] \cdot [2, 3] + [2, 3] = [-4, 1]$. Вынося общий множитель y за скобки, выражение запишется в виде $f(x, y) = y(x+1)$. Применяя теорему, получим $[2, 3] \cdot ([-2, -1] + 1) = [-3, 0]$. Видно, что получившийся в первом случае интервал несколько шире, чем во втором. Можно сделать вывод, что результат интервальной оценки напрямую зависит от вида оцениваемого выражения.

Из данной теоремы следует, что если одна и та же переменная встречается более одного раза, то интервал получаемый в результате применения теоремы может оказаться неравным области значений данной функции.

1.2 Независимые и связанные интервальные величины

Интервал описывает только границы возможных значений конкретной величины, но для более глубокого анализа требуется знание, как именно может пробегать данный интервал наша величина.

Определение 1.3 ***Интервальной величиной*** *назовём упорядоченную пару* $\lfloor a, \boldsymbol{a} \rceil$, *где* a *— переменная и* $\boldsymbol{a}$ *– интервал её возможных значений,* $a \in \boldsymbol{a}$.

Определение 1.4 *Интервальные величины* $\lfloor a_1, \boldsymbol{a_1} \rceil$, $\lfloor a_2, \boldsymbol{a_2} \rceil$, $\ldots$, $\lfloor a_n, \boldsymbol{a_n} \rceil$ *назовём* ***независимыми****, если упорядоченный набор соответствующих переменных* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, принимает любые значения из декартова произведения интервалов их изменения* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$*, т. е. из интервального бруса*

$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \subseteq \mathbb{R}^n$. *В произвольном случае интервальные величины называются* ***зависимыми (связанными)****.*

Даны две независимые интервальные величины $\lfloor x_1, [0,1] \rceil$ и $\lfloor x_2, [0,1] \rceil$. Рассмотрим интервальную величину $\lfloor x_3, \boldsymbol{x_3} \rceil$, являющуюся суммой данных величин, т. е. $x_3 = x_1 + x_2$. Тогда $\lfloor x_3, [0,2] \rceil$. Построим диаграмму зависимости величин x_1 и x_3, т. е. графическое представление совместной области значений.

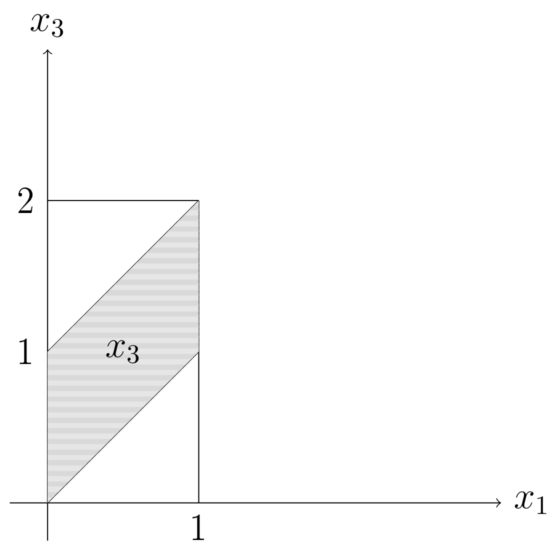

Рис. 1.1: Диаграмма зависимости переменных x_1 и x_3

Можно заметить, что x_3 действительно принимает любые значения из $[0,2]$, но совместная область значений переменных x_1 и x_3 не заполняет всего бруса $[0,1] \times [0,2]$. Данный пример иллюстрирует, что интервальные величины $\lfloor x_1, \boldsymbol{x_1} \rceil$ и $\lfloor x_3, \boldsymbol{x_3} \rceil$ являются *зависимыми*.

При расчёте промежуточных выражений, имеющих общее происхождение от исходных переменных, результирующая величина может оказаться зависимой по отношению к исходным. Приобретение зависимости промежуточных результатов, при независимости исходных величин, называется *эффектом зависимости*. Именно он является основной причиной огрубления интервальных оценок.

1.3 Дистрибутивность в интервальной арифметике

В арифметике действительных чисел сложение и умножение связано свойством дистрибутивности:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Данное свойство, к сожалению, не выполняется в интервальной арифметике. Убедиться можно следующим примером:

$$[0, 1] \cdot (1 - 1) = 0, \tag{1.9}$$

$$[0, 1] - [0, 1] = [-1, 1], \tag{1.10}$$

$$0 \neq [-1, 1]. \tag{1.11}$$

Предложение 1.2 *Для любых интервалов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{IR}$ *имеет место*

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \subseteq \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}, \tag{1.12}$$

называемое свойством ***субдистрибутивности***.

Полное доказательство предложения можно найти в [10]. Интуитивное объяснение свойства субдистрибутивности заключается в следующем. Пусть интервальные величины $\lfloor a, \boldsymbol{a} \rceil$, $\lfloor b, \boldsymbol{b} \rceil$, $\lfloor c, \boldsymbol{c} \rceil$ независимы. Заметим, что интервальные величины $\lfloor ab, \boldsymbol{ab} \rceil$ и $\lfloor ac, \boldsymbol{ac} \rceil$ являются зависимыми, т. к. имеют общее происхождение от интервальной величины $\lfloor a, \boldsymbol{a} \rceil$. Если мы вынесем общий множитель a, то действий с зависимыми величинами не останется. Следовательно, общий множитель в выражениях целесообразно выносить, чтобы получить наиболее узкий результат. Но достижимо ли равенство в (1.12)? На этот вопрос отвечает следующее предложение, доказанное, к примеру, в [10].

Предложение 1.3 *Дистрибутивность выполняется в следующих случаях:*

1. $a(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = a\boldsymbol{b} + a\boldsymbol{c}$, *если* $a \in \mathbb{R}$,
2. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$, *если* $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *неотрицательные (неположительные).*

Интервал $\boldsymbol{a}$ *неотрицательный (неположительный)*, если $\underline{\boldsymbol{a}} \geq 0$ ($\overline{\boldsymbol{a}} \leq 0$).

1.4 Интервальное расширение элементарных функций

Для элементарных функций, как и для арифметический операций, можно записать фундаментальный принцип как для «унарной операции». То есть

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big\{ f(x) \mid x \in \boldsymbol{x} \big\}, \tag{1.13}$$

где, например, $f(x) = x^3$ или $f(x) = e^x$. Поскольку данный принцип не позволяет конструктивно находить множество (1.13) для произвольной функции f, будем использовать интервальные расширения функций.

Определение 1.5 *Интервальная функция* $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ *называется* ***интервальным продолжением функции*** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, если* $\boldsymbol{f}(x) = f(x)$*.*

Определение 1.6 *Интервальная функция* $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ *называется* ***интервальным расширением*** *точечной функции* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, если:*

1. $\boldsymbol{f}$ *является интервальным продолжением*

2. $\boldsymbol{f}$ *монотонна по включению:* $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \implies \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$

Интервальные расширения всегда дают внешние оценки области значений функции.

Попытаемся расширить класс выражений, которые оцениваются интервальными методами, включив в них выражения, содержащие элементарные функции. Элементарными функциями являются:

- модуль,
- степенная,
- показательная и логарифмическая,
- тригонометрические и обратные тригонометрические.

Также в список оцениваемых функций включим *максимум* и *минимум*.

Приведём пример из [14] как считается интервальная оценка для элементарной функции $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{x}^n = \begin{cases} \left[\underline{\boldsymbol{x}}^n, \overline{\boldsymbol{x}}^n\right], & \text{если } \underline{\boldsymbol{x}} > 0 \text{ или } n \text{ нечётное,} \\ \left[\overline{\boldsymbol{x}}^n, \underline{\boldsymbol{x}}^n\right], & \text{если } \overline{\boldsymbol{x}} < 0 \text{ и } n \text{ чётное,} \\ \left[0, |\boldsymbol{x}|^n\right], & \text{если } 0 \in \boldsymbol{x} \text{ и } n \text{ чётное.} \end{cases}$$

При помощи данной формулы мы сможем вычислить значение степенной функции в любом случае. Реализации других элементарных функций содержатся в интервальных библиотеках, все они удовлетворяют определению интервального продолжения функции. А значит, используя машинную интервальную арифметику, мы получаем интервал, наверняка содержащий точный результат.

Определение 1.7 *Аналитическое выражение, которое составлено из символов переменных, констант,* $\{+, -, \cdot, /\}$ *и элементарных функций будем называть* ***элементарными функциональными выражениями****.*

Определение 1.8 *Интервальное расширение элементарного функционального выражения* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, которое получается в результате замены переменных на интервалы их изменения, а арифметических операций и элементарных функций — на их интервальные аналоги и расширения называется* ***естественным интервальным расширением*** *и обозначается* $\boldsymbol{f}_\natural$*.*

Поскольку интервальные расширения вычисляются с некоторой погрешностью, то хотелось бы знать её порядок. Имеет место следующая оценка

$$\operatorname{dist}\big(\boldsymbol{f}_\natural(\boldsymbol{X}), \operatorname{ran}(f, \boldsymbol{X})\big) \leq C \cdot \operatorname{wid}(\boldsymbol{X}), \text{где } C \text{ – константа не зависящая от } \boldsymbol{X}.$$

Доказательство данного утверждения дано в [10]. То есть, погрешность вычислений естественного интервального расширения имеет 1-ый порядок относительно ширины бруса.

1.5 Центрированная форма

Пусть функция $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируема и положим, что $\boldsymbol{f}' : \mathbb{I}D \to \mathbb{IR}^n$ интервальная оценивающая функция производной функции f', т. е. $\operatorname{ran}(f', \boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{X})$, для всех $\boldsymbol{X} \in \mathbb{I}D$.

Определение 1.9 *Интервальная оценивающая функция*

$$\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{x}) := f(c) + (\boldsymbol{x} - c)^{\top} \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \quad \textit{для } \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}D, \tag{1.14}$$

называется ***дифференциальной центрированной формой*** *(или просто* ***центрированной формой****) функции f, где $c = \operatorname{mid} \boldsymbol{x}$ или другая точка бруса $\boldsymbol{x}$.*

Обычно для вычисления $\boldsymbol{f}'$ используют естественное интервальное расширение, автоматическое дифференцирование, описанное в §1.6, или другие интервальные расширения функций.

Теорема 1.2 (теорема Каприни-Мадсена)
Если $c = \operatorname{mid} \boldsymbol{x}$, а интервальная оценка производной $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ монотонна по включению, то выражение $\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{x})$, задаваемое как (1.14), также монотонно по включению:

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{y}).$$

Доказательство данной теоремы можно найти, например, в [10].

Определение 1.10 *Интервальная оценивающая функция $\boldsymbol{f} : \mathbb{I}D \to \mathbb{IR}$ называется* ***липшицевой****, если существует константа $K \in \mathbb{R}$ (константа*

Липшица) такая, что

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \le K \operatorname{wid} \boldsymbol{x} \qquad \text{для } \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}D.$$

Теорема 1.3 (теорема Кравчика-Никеля)

Если $\boldsymbol{f}'$ липшицева, тогда центрированная форма $\boldsymbol{f}_{mv}$, задаваемая формулой (1.14)*, сходится с порядком 2.*

Доказательство данной теоремы можно найти в [15]. Следовательно, для получения более точной оценки, использование центрированной формы займёт меньшее время по сравнению с естественным интервальным оцениванием. Но имеет ли тогда смысл использовать естественное интервальное оценивание.

В [16] говорится, что естественное интервальное оценивание даёт более узкий результат по сравнению с центрированной формой, то тех пор, пока $\operatorname{wid} \boldsymbol{x} \le \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}D$, а также занимает меньше трудозатрат. Но с увеличением размерности и спецификой конкретной задачи, константа, находящаяся в правой части неравенства, варьируется. Следовательно при оценивании функции на конкретном брусе имеет смысл адаптивно выбирать оценивающую функцию. На широких брусах следует использовать естественное интервальное оценивание, а на узких — центрированную форму. Также можно считать обоими способами и результаты пересечь.

1.6 Автоматическое дифференцирование

Автоматическим дифференцированием (или *алгоритмическим дифференцированием*) называют метод нахождения численного значения производной функции, заданных конечными выражениями, который основан на разборе их дерева Канторовича. Изложим идею данного метода.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — выражения, зависящие от переменной x. Для каждого значения выражения u также будем хранить значение производной u' в виде пары (u, u'). На множестве таких пар введём арифметику по следующим правилам:

$$(u, u') + (v, v') = (u + v, u' + v'), \tag{1.15}$$

$$(u, u') - (v, v') = (u - v, u' - v'), \tag{1.16}$$

$$(u, u') \cdot (v, v') = (uv, u'v + uv'), \tag{1.17}$$

$$\frac{(u, u')}{(v, v')} = \left(\frac{u}{v}, \frac{u'v - uv'}{v^2}\right). \tag{1.18}$$

Пусть дано конкретное выражение $u(x)$. В данном выражении переменную x заменяем на пару $(x, 1)$, а константы c — на пары $(c, 0)$. Заменив переменную x в парах $(x, 1)$ на величину её изменения и продолжив вычисления по формулам (1.15)–(1.18), на выходе получим пару, состоящую из области значения функции и области значения её производной.

Данное правило очевидным способом обобщается на случай многих переменных. Также на множестве пар можно вычислять значение элементарных функций по следующему правилу:

$$g\big((u, u')\big) = \big(g(u), u'g'(u)\big), \qquad g \text{ — некоторая функция.} \tag{1.19}$$

Приведём пример вычисления некоторого числа элементарных функций.

$$\sin\big((u, u')\big) = (\sin u, u' \cos u), \tag{1.20}$$

$$\exp\big((u, u')\big) = (\exp u, u' \exp u), \tag{1.21}$$

$$\big((u, u')\big)^n = (u^n, nu^{n-1}u'), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Арифметику пар (u, u') с операциями (1.15)–(1.18) называют *дифференциальной арифметикой*, а метод вычислений её использующий — *автоматическим дифференцированием.*

1.7 Метод Кравчика

Рассмотрим метод внешнего интервального оценивания решений систем нелинейных уравнений.

Пусть на брусе $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ задана система из n нелинейных уравнений с n неизвестными

$$F(x) = 0,$$

для которой требуется уточнить двусторонние границы решений.

Определение 1.11 *Пусть даны правила, сопоставляющие брусу $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ точку $\tilde{x} \in \boldsymbol{X}$ и вещественную $n \times n$-матрицу Λ и пусть также $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальная матрица Якоби отображения $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ на*

$\boldsymbol{X} \in \mathbb{I}D$. *Отображение*

$$\mathcal{K} : \mathbb{I}D \times \mathbb{R} \to \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + \big(I - \Lambda \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X})\big)(\boldsymbol{X} - \tilde{x}), \tag{1.23}$$

называется ***оператором Кравчика*** *на* $\mathbb{I}D$ *относительно точки* $\tilde{x}$.

Оператор Кравчика — это центрированная форма интервального расширения, с центром в точке $\tilde{x}$, для отображения $\Phi(x) = x - \Lambda F(x)$, возникающего в правой части системы уравнений после её преобразования к рекуррентному виду

$$x = \Phi(x).$$

Предложение 1.4 *Если* $x^* \in \boldsymbol{X}$ *— решение системы* $F(x) = 0$, *то оно также содержится в операторе Кравчика* $\mathcal{K}(\boldsymbol{X}, \tilde{x})$.

Из данного предложения сделаем вывод, что для уточнения решения можно взять следующий брус $\mathcal{K}(\boldsymbol{X}, \tilde{x}) \cap \boldsymbol{X}$. Если $\mathcal{K}(\boldsymbol{X}, \tilde{x}) \cap \boldsymbol{X} = \varnothing$, то на $\boldsymbol{X}$ нет решений системы $F(x) = 0$.

Наиболее популярным способом выбора параметра Λ является обратная средняя матрицы Якоби, т. е. $\Lambda = \big(\operatorname{mid} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X})\big)^{-1}$. А наиболее распространённым выбором параметра $\tilde{x}$ является средняя точка бруса $\boldsymbol{X}$, т. е. $\tilde{x} = \operatorname{mid} \boldsymbol{X}$, поскольку тогда минимизируется ширина значений $\mathcal{K}(\boldsymbol{X}, \tilde{x})$ (см. [10]).

Глава 2

Интервальный алгоритм глобальной оптимизации

2.1 Интервальное оценивание областей значений функций

Поставим задачу оценивания области значений элементарного функционального выражения $f : \mathbb{R}^n \supseteq \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$, а именно

$$\operatorname{ran}(f, \boldsymbol{X}) := \bigl\{ f(x) \mid x \in \boldsymbol{X} \bigr\},$$

где $\boldsymbol{X}$ — интервал в $\mathbb{R}$ или многомерный брус в $\mathbb{R}^n$. Для непрерывной функции f имеет место равенство

$$\operatorname{ran}(f, \boldsymbol{X}) = \Bigl[\min_{x \in \boldsymbol{X}} f(x),\ \max_{x \in \boldsymbol{X}} f(x) \Bigr].$$

Следовательно, задачу нахождения области значения функции можно решать оптимизационными методами. Зная, что

$$\max_{x \in \boldsymbol{X}} f(x) = -\Big(\min_{x \in \boldsymbol{X}} \big(-f(x)\big) \Big),$$

можно остановиться на задаче поиска минимума функции.

Найти глобальный минимум функции $f : \mathbb{R}^n \supseteq \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ на прямоугольном брусе $\boldsymbol{X}$ со сторонами, параллельными координатным осям.

$$\boxed{\text{Найти } \min_{x \in \boldsymbol{X}} f(x).}$$

Данная задача в общем случае является NP-трудной (см. [13]), а следовательно для её решения неизбежно применение методов, осуществляющих перебор, или применение приближенных алгоритмов. NP-трудность задачи оптимизации для полиномов от многих переменных, доказал Гаганов А.А. [2].

2.2 Общая схема методов

Как было сказано в §1.4, погрешность интервального оценивания тем меньше, чем меньше ширина бруса, на котором производится оценивание. Основываясь на данном факте, мы можем улучшить точность интервальной оценки, дробя исходный брус.

Первопроходцем в данном вопросе был Р.Е. Мур. Он предложил равномерно дробить все компоненты бруса на фиксированное натуральное число N подбрусов. На каждом из подбрусов находится интервальная оценка области значений, получившиеся интервальные оценки области значений на каждом из подбрусов необходимо объединить. Поскольку ширина каждого подбруса меньше, чем у исходного, то погрешность интервальной оценки области значений будет меньше. Трудоёмкость данного метода пропорциональна величине N^n, где n — размерность бруса области определения функции, которая чрезмерно высока для большинства его применений.

Чтобы ещё улучшить получившийся результат, продолжим дробление полученных подбрусов. Такой подход никак не использует получившиеся ранее результаты вычислений. Следовательно, целесообразно использовать процедуру адаптивного дробления, чтобы уменьшить вычислительные затраты. Процедура должна удовлетворять следующим свойствам:

- для улучшения оценки области значений, необходимо дробить те подбрусы, на которых достигаются нижний и верхний концы интервальной оценки области значений функции;

- не имеет смысл дробить все компоненты сразу, необходимо лишь, чтобы мера получаемых подбрусов была меньше, чем у дробимого.

Высказанные нами идеи, сформулирует в виде алгоритма глобальной минимизации функции `GlobOpt`, который использует *рабочий список* $\mathcal{L}$, для хранения всех подбрусов, получающихся в результате дробления исходного бруса области определения $\boldsymbol{X}$. Также в рабочем списке будем хранить нижнюю оценку области значения, найденную на каждом брусе, т. е. элементами списка $\mathcal{L}$ будут пары вида $(\boldsymbol{Y}, y)$, где $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$, $y = \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})}$. На первом шаге помещается запись $\big(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\big)$, далее каждый шаг алгоритма состоит в извлечении из этого списка бруса, который обеспечивает рекордную оценку минимума снизу,

его дроблении на подбрусы меньшей меры,

оценивании на них нижней оценки минимума функции,

занесении результатов в рабочий список, удаляя исходный брус.

Вход: Интервальное расширение $\boldsymbol{f} : \mathbb{I}\boldsymbol{X} \to \mathbb{IR}$ целевой функции f. Заданная точность $\varepsilon > 0$. Брус $\boldsymbol{X}$.

Выход: Оценка y^* глобального минимума f^* функции f на брусе $\boldsymbol{X}$ с точностью ε.

$\boldsymbol{Y} \leftarrow \boldsymbol{X}$;

вычисляем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})$ и присваиваем $y \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})}$;

инициализируем список $\mathcal{L} := \big\{(\boldsymbol{Y}, y)\big\}$;

while $\big(\mathrm{wid}\,(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})) \geq \varepsilon\big)$ **do**

  выбираем компоненту l, по которой брус $\boldsymbol{Y}$ имеет наибольшую ширину, т. е. $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{Y}_l = \max_i \mathrm{wid}\,\boldsymbol{Y}_i$;

  рассекаем брус $\boldsymbol{Y}$ по l-ой координате пополам на брусы $\boldsymbol{Y}'$ и $\boldsymbol{Y}''$ такие что

  $\boldsymbol{Y}' := (\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\underline{\boldsymbol{Y}_l}, \mathrm{mid}\,\boldsymbol{Y}_l], \boldsymbol{Y}_{l+1}, \dots, \boldsymbol{Y}_n)$,

  $\boldsymbol{Y}'' := (\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\mathrm{mid}\,\boldsymbol{Y}_l, \overline{\boldsymbol{Y}_l}], \boldsymbol{Y}_{l+1}, \dots, \boldsymbol{Y}_n)$;

  вычисляем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}')$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}'')$;

  присваиваем $v' \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}')}$ и $v'' \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}'')}$;

  удаляем запись $(\boldsymbol{Y}, y)$ из списка $\mathcal{L}$;

  помещаем записи $(\boldsymbol{Y}', v')$ и $(\boldsymbol{Y}'', v'')$ в список $\mathcal{L}$ в порядке возрастания второго поля;

  обозначаем ведущую запись списка через $(\boldsymbol{Y}, y)$;

end

$y^* \leftarrow y$;

Алгоритм 1: Простейший интервальный алгоритм `GlobOpt`

Пусть записи в списке упорядочены по возрастанию второго поля, тогда первый элемент списка назовём *ведущей записью*. Брус $\boldsymbol{Y}$ данной записи называется *ведущим брусом*, а оценка y — *ведущей оценкой* для данного шага алгоритма. Псевдокод алгоритма `GlobOpt` записан в **Алгоритм 1**.

Предложение 2.1 *В алгоритме* `GlobOpt` *суммы ширин компонент ведущих брусов стремятся к нулю.*

Следовательно в пределе, погрешность интервального оценивания области значений на ведущем брусе равна 0. К данному алгоритму можно применить различные модификации.

2.3 Модификации

Простейший интервальный алгоритм глобальной оптимизации, псевдокод которого представлен в **Алгоритм 1**, едва ли с успехом можно применить к решению серьёзных практических задач. Одной из причин является уменьшение эффективности дробления с ростом размерности бруса области определения. Например, для размерности 2 дробление одной грани куба пополам уменьшает его диаметр примерно на 21%, а для размерности 10 — примерно на 3.8%. Данные соотношения для куба размерности n можно получить из следующей формулы $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4n}}\right) \cdot 100\%$. Следовательно, для уточнения области значений требуются процедуры, использующие какие-либо свойства функции.

За основу возьмём модификацию алгоритма, сделанную Герасименко Д.В. [3], псевдокод которого представлен в **Алгоритм 2**. Данный алгоритм по скорости работы в значительной степени превосходит простейший, следовательно применим к решению комплексных задач.

Вход: Интервальное расширение $\boldsymbol{f} : \mathbb{I}\boldsymbol{X} \to \mathbb{IR}$ целевой функции f. Выражение функции f в виде дерева Канторовича. Заданная точность $\varepsilon > 0$.
Брус $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$.

Выход: Оценка y^* глобального минимума f^* функции f на брусе $\boldsymbol{X}$ с точностью ε.

$\boldsymbol{Y} \leftarrow \boldsymbol{X}$;
вычисляем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})$;
вычисляем по дереву Канторовича функции f интервальную оценку $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y})$ при помощи автоматического дифференцирования;
вычисляем $\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{Y})$ по (1.14);
присваиваем $y \leftarrow \max\{\underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})}, \underline{\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{Y})}\}$;
инициализируем список $\mathcal{L} := \big\{(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}), y)\big\}$;
while $\big(\operatorname{wid}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})) \geq \varepsilon\big)$ **do**
  выбираем компоненту l следующим образом
  $|\boldsymbol{f}'_l(\boldsymbol{Y}_l)| \cdot \operatorname{wid} \boldsymbol{Y}_l = \max_{i=1,\dots,n} (|\boldsymbol{f}'_i(\boldsymbol{Y}_i)| \cdot \operatorname{wid} \boldsymbol{Y}_i)$;
  рассекаем брус $\boldsymbol{Y}$ по l-ой координате пополам на брусы $\boldsymbol{Y}'$ и $\boldsymbol{Y}''$ такие что
  $\boldsymbol{Y}' := (\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\underline{\boldsymbol{Y}_l}, \operatorname{mid} \boldsymbol{Y}_l], \boldsymbol{Y}_{l+1}, \dots, \boldsymbol{Y}_n)$,
  $\boldsymbol{Y}'' := (\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\operatorname{mid} \boldsymbol{Y}_l, \overline{\boldsymbol{Y}_l}], \boldsymbol{Y}_{l+1}, \dots, \boldsymbol{Y}_n)$;
  вычисляем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}')$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}'')$;
  вычисляем по дереву Канторовича функции f интервальную оценку $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}')$ и $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}'')$ при помощи автоматического дифференцирования;
  вычисляем $\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{Y}')$ и $\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{Y}'')$;
  присваиваем $v' \leftarrow \max\{\underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}')}, \underline{\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{Y}')}\}$ и $v'' \leftarrow \max\{\underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}'')}, \underline{\boldsymbol{f}_{mv}(\boldsymbol{Y}'')}\}$;
  foreach $\boldsymbol{Z} \in \{\boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Y}''\}$ **do**
    for *i=1:n* **do**
      if $\boldsymbol{f}'_i(\boldsymbol{Z})$ *неотрицательна* **then**
        присваиваем $\boldsymbol{Z}_i \leftarrow \Big[\underline{\boldsymbol{Z}_i}, \underline{\boldsymbol{Z}_i}\Big]$;
      end
      if $\boldsymbol{f}'_i(\boldsymbol{Z})$ *неположительна* **then**
        присваиваем $\boldsymbol{Z}_i \leftarrow \Big[\overline{\boldsymbol{Z}_i}, \overline{\boldsymbol{Z}_i}\Big]$;
      end
    end
  end
  удаляем запись $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}), y)$ из списка $\mathcal{L}$;
  помещаем записи $(\boldsymbol{Y}', \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}'), v')$ и $(\boldsymbol{Y}'', \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}''), v'')$ в список $\mathcal{L}$ в порядке возрастания третьего поля;
  обозначаем ведущую запись списка через $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}), y)$;
end
$y^* \leftarrow y$;

Алгоритм 2: Модифицированный интервальный алгоритм `GlobOpt`

Поскольку мы занимаемся нахождением минимума *элементарного функционального выражения*, то без ограничения общности можно считать, что все функции дважды дифференцируемы на области определения. Пусть $u(x)$

и $v(x)$ — некоторые выражения от переменной x. Расширим идею автоматического дифференцирования для нахождения второй производной. А именно, для выражения $u(x)$ ввести арифметику троек (u, u', u''). Запишем правила для элементарных арифметических операций и общее правило для элементарной функции g:

$$(u, u', u'') + (v, v', v'') = (u + v, u' + v', u'' + v''), \tag{2.1}$$

$$(u, u', u'') - (v, v', v'') = (u - v, u' - v', u'' - v''), \tag{2.2}$$

$$(u, u', u'') \cdot (v, v', v'') = (uv, u'v + uv', u''v + 2u'v' + uv''), \tag{2.3}$$

$$\frac{(u, u', u'')}{(v, v', v'')} = \left(\frac{u}{v}, \frac{u'v - uv'}{v^2}, \frac{(u''v - uv'')v - 2(u'v - uv')}{v^3}\right), \tag{2.4}$$

$$g\big((u, u', u'')\big) = \big(g(u), u'g'(u), u''g'(u) + (u')^2 g''(u)\big). \tag{2.5}$$

Теперь переменную x будем заменять на тройку $(x, 1, 0)$, а константы c — на $(c, 0, 0)$. Данные правила очевидным способом обобщаются на случай многих переменных.

Поскольку точность оценивания интервальных расширений напрямую зависит от вида выражения, то формулы для вычисления производных необходимо переписать таким образом,чтобы результат был наиболее узким. Рассмотрим пример вычисления производной частного функций $f(x)$ и $g(x)$ двумя эквивалентными способами:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f''}{g} - g'\frac{f}{g^2}. \tag{2.7}$$

Пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$, а брус, на котором будем производить оценивание естественным интервальным расширением, возьмём равным $[\pi, 2\pi]$. Вычисление интервальной оценки производной частного способом (2.6) даёт интервал $[-0.129006, 0.534291]$, а способом (2.7) — $[-0.129006, 0.230328]$. Нетрудно убедиться, что следует использовать формулу (2.7) для вычисления производного частного. Подобное улучшение было проведено для всех формул вычисления первых и вторых производных функции.

Следующей модификацией стало применение центрированной формы не только для целевой функции, но и для всех промежуточных вычислений, а также её использование для оценки области значений первых частных производных. Данную модификацию можно реализовать, если хранить брус, на котором производится оценивание, а также хранить выражение целевой функции в виде дерева Канторовича (или другим эквивалентным способом).

Как известно из математического анализа, если точка $x \in D$, где D компактное множество, является экстремумом дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^n \supset D \to R$, то она лежит либо на границе множества D, либо лежит в его внутренности $(D \backslash \partial D)$ и обладает свойством $f'(x) = 0$. Следовательно, на брусах, лежащих внутри области определения, можно использовать оператор Кравчика (1.23), для уточнения двусторонних границ решения. Данное улучшение помогает сократить область перебираемых брусов, ускоряя время работы алгоритма.

Высказанные нами улучшения и идеи сформулируем в виде алгоритма глобальной оптимизации **Алгоритм 3**.

Вход: Интервальное расширение $\boldsymbol{g} : \mathbb{I}\boldsymbol{X} \to \mathbb{IR}$ для любой операции g целевой функции f.
Выражение функции f в виде дерева Канторовича. Заданная точность $\varepsilon > 0$.
Брус $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$.
Выход: Оценка y^* глобального минимума f^* функции f на брусе $\boldsymbol{X}$ с точностью ε.

$\boldsymbol{Y} \leftarrow \boldsymbol{X}$;
foreach *операций* $g \in f$*, прямым ходом* **do**
  вычисляем $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y})$;
  вычисляем интервальные оценки $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{Y})$ и $\boldsymbol{g}''(\boldsymbol{Y})$ при помощи автоматического дифференцирования;
  вычисляем $\boldsymbol{g}'_{mv}(\boldsymbol{Y})$ и присваиваем $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{Y}) \leftarrow \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{Y}) \cap \boldsymbol{g}'_{mv}(\boldsymbol{Y})$;
  вычисляем $\boldsymbol{g}_{mv}(\boldsymbol{Y})$ и присваиваем $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}) \leftarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}) \cap \boldsymbol{g}_{mv}(\boldsymbol{Y})$;
end
присваиваем $y \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})}$;
инициализируем список $\mathcal{L} := \big\{(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}), y)\big\}$;
while $\big(\operatorname{wid}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})) \geq \varepsilon\big)$ **do**
  выбираем компоненту l следующим образом $|\boldsymbol{f}'_l(\boldsymbol{Y}_l)| \cdot \operatorname{wid}\boldsymbol{Y}_l = \max_{i=1,\dots,n}(|\boldsymbol{f}'_i(\boldsymbol{Y}_i)| \cdot \operatorname{wid}\boldsymbol{Y}_i)$;
  рассекаем брус $\boldsymbol{Y}$ по l-ой координате пополам на брусы $\boldsymbol{Y}'$ и $\boldsymbol{Y}''$ такие что
  $\boldsymbol{Y}' := (\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\underline{\boldsymbol{Y}_l}, \operatorname{mid}\boldsymbol{Y}_l], \boldsymbol{Y}_{l+1}, \dots, \boldsymbol{Y}_n)$,
  $\boldsymbol{Y}'' := (\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\operatorname{mid}\boldsymbol{Y}_l, \overline{\boldsymbol{Y}_l}], \boldsymbol{Y}_{l+1}, \dots, \boldsymbol{Y}_n)$;
  удаляем запись $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}), y)$ из списка $\mathcal{L}$;
  foreach $\boldsymbol{Z} \in \{\boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Y}''\}$ **do**
    foreach *операций* $g \in f$*, прямым ходом* **do**
      вычисляем $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z})$;
      вычисляем интервальные оценки $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{Z})$ и $\boldsymbol{g}''(\boldsymbol{Z})$ при помощи автоматического дифференцирования;
      вычисляем $\boldsymbol{g}'_{mv}(\boldsymbol{Z})$ и присваиваем $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{Z}) \leftarrow \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{Z}) \cap \boldsymbol{g}'_{mv}(\boldsymbol{Z})$;
      вычисляем $\boldsymbol{g}_{mv}(\boldsymbol{Z})$ и присваиваем $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z}) \leftarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z}) \cap \boldsymbol{g}_{mv}(\boldsymbol{Z})$;
    end
    присваиваем $v \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z})}$;
    if $\boldsymbol{Z}$ *принадлежит внутренности* $\boldsymbol{X}$ **then**
      присваиваем $\Lambda \leftarrow (\operatorname{mid}\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{Z}))^{-1}$;
      вычисляем $\boldsymbol{f}'(\operatorname{mid}\boldsymbol{Z})$ автоматическим дифференцированием;
      присваиваем $\mathcal{K} \leftarrow \operatorname{mid}\boldsymbol{Z} - \Lambda\boldsymbol{f}'(\operatorname{mid}\boldsymbol{Z}) + (I - \Lambda\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{Z}))(\boldsymbol{Z} - \operatorname{mid}\boldsymbol{Z})$;
      присваиваем $\boldsymbol{Z} \leftarrow \boldsymbol{Z} \cap \mathcal{K}$;
      if $\boldsymbol{Z} = \varnothing$ **then**
        break;
      end
    end
    for *i=1:n* **do**
      if $\boldsymbol{f}'_i(\boldsymbol{Z})$ *неотрицательна* **then**
        присваиваем $\boldsymbol{Z}_i \leftarrow [\,\underline{\boldsymbol{Z}_i}, \underline{\boldsymbol{Z}_i}\,]$;
      end
      if $\boldsymbol{f}'_i(\boldsymbol{Z})$ *неположительна* **then**
        присваиваем $\boldsymbol{Z}_i \leftarrow [\,\overline{\boldsymbol{Z}_i}, \overline{\boldsymbol{Z}_i}\,]$;
      end
    end
    помещаем запись $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Z}), v)$ в список $\mathcal{L}$ в порядке возрастания третьего поля;
  end
  обозначаем ведущую запись списка через $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{Y}), y)$;
end
$y^* \leftarrow y$;

Алгоритм 3: Модифицированный интервальный алгоритм `GlobOpt`

Глава 3

Сценарий аварии «Пожар пролива ЛВЖ»

3.1 Постановка задачи

Перейдём к решению практической задачи, описанной в [6]. Необходимо найти количественную оценку неопределённости пожарного риска. Как сказано в [7], критерием поражения является величина интенсивности теплового излучения, именно её и будем оценивать. Под ЛВЖ понимается легко воспламеняемая жидкость.

В данной задаче следующие параметры будем считать независимыми:

- скорость ветра u_w — средняя скорость ветра, полученная осреднением за 10 минут, измеренная на высоте 10 м от подстилающей поверхности;
- расстояние X — расстояние по горизонтали от объекта-мишени до центра основания пламени;

- температура атмосферного воздуха $T_{\text{в}}$ — диапазон средней температуры воздуха за год;
- температура кипения нефраса С50/170 $t_{\text{рас}}$;
- диаметр пролива $d_{\text{пр}}$.

Данные величины обладают параметрической неопределённостью, а значит мы можем только указать интервалы их изменения. Величины параметров брались для г. Йошкар-Ола, Республика Марий Эл, указанные в работе [6]. С целью упрощения модели, расстояние до объекта-мишени выберем равным $X = 100$ м. Определим значения интервалов остальных параметров:

- диапазон скорости ветра u_w. По данным ГУ «Марийский ЦГМС» значение скорости ветра 95% обеспеченности для Марий Эл составляет 9 м/с. Также от задачи требуется «большая» скорость ветра, экспертно положим интервал равным $[2.3, 9]$ м/с;
- температура атмосферного воздуха $T_{\text{в}}$. Присваиваем значения из интервала $T_{\text{в}} \in [254, 298.8]^{\circ}$K. Нижний конец интервала соответствует зимней температуре 95% обеспеченности для Марий Эл, верхний — летней температуре по данным СНиП 23-01-99 (2003) [8];
- температура кипения нефраса С50/170 $t_{\text{рас}} \in [50, 170]^{\circ}$C;
- диаметр пролива $d_{\text{пр}} \in [15.2, 34.8]$ м, оценка данного параметра подробно рассмотрена в [5].

Приведём формулы для вычисления параметров задачи:

- плотность атмосферного воздуха $\rho_{\text{в}}$. Принимая по ГОСТ 4401-81 [4] плотность воздуха $\rho_{\text{в.ст}} = 1.225$ кг/м^3 при $T_{\text{ст}} = 288.15°$K, тогда для любой температуры воздуха T:

$$\rho_{\text{в}}(T) = \frac{\rho_{\text{в.ст}} \cdot T_{\text{ст}}}{T};$$

- среднеповерхностная плотность теплового потока E_f кВт/м^2. Воспользовавшись третьей строкой Таблицы П3.4 Приложения 3 в [7], а также воспользовавшись методом линейной интерполяции для $d_{\text{пр}}$ получим $E_f \in [31.6, 53.2]$ кВт/м^2;

- молярная масса нефраса μ вычисляется по следующим формулам:

$$K = 1.216 \frac{\sqrt[3]{t_{\text{рас}}}}{\rho_{15}^{15}}, \quad \rho_{15}^{15} = 0.67668 \text{ г/м}^3,$$

$$\mu = (7K - 21.5) + (0.76 - 0.04K)t_{\text{рас}} + (0.0003K - 0.00245)t_{\text{рас}}^2.$$

  Данные формулы были взяты из учебного пособия [9], а параметр ρ_{15}^{15} был взят, основываясь на паспортах качества нефраса от производителей ВитаХим [1] и ЭКСПЕРТ-ОЙЛ [11];

- величина плотности насыщенных паров нефраса $\rho_{\text{п}}$, задаётся уравнением (П3.29) из [7] следующим образом

$$\rho_{\text{п}} = \frac{\mu}{V_\mu \cdot (1 + 0.00367 \cdot t_{\text{рас}})}.$$

  V_μ — молярный объём, 22.4 м^3/кмоль;

- безразмерный параметр характерной скорости ветра u_*

$$u_* = u_w \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_{\text{п}}}{m' g \cdot d_{\text{пр}}}};$$

Удельная массовая скорость выгорания горючего вещества m' имеет точечное значение 0.06 кг/м^2 $\cdot$ с, ускорение свободного падения g = 9.81 м/с^2. В расчётных формулах нам понадобится следующий параметр, который всегда определён при «больших» скоростях ветра:

$$u_{*2} = u_* \cap [1, +\infty);$$

- длина пламени $L_{\text{пл}}$

$$L_{\text{пл}} = \frac{55 \cdot u_{*2}^{0.21} \cdot d_{\text{пр}}^{0.665} \cdot m'^{0.67}}{\rho_{\text{в}}^{0.67} \cdot g^{0.335}};$$

- наклон пламени по действием ветра $\theta_{\text{пл}}$

$$\cos\theta_{\text{пл}} = \frac{1}{\sqrt{u_{*2}}};$$

- расчёт геометрического фактора видимости F_q в рамках нормативной методики вычисляется по следующим формулам:

$$a = \frac{2L_{\text{пл}}}{d_{\text{пр}}}, \qquad b = \frac{2X}{d_{\text{пр}}}, \qquad A = \sqrt{a^2 + (b+1)^2 - 2a(b+1)\sin\theta_{\text{пл}}},$$

$$B = \sqrt{a^2 + (b-1)^2 - 2a(b-1)\sin\theta_{\text{пл}}}, \quad C = \sqrt{1 + (b^2-1)\cos\theta_{\text{пл}}},$$

$$D = \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}, \qquad E = \frac{a\cos\theta_{\text{пл}}}{b - a\sin\theta_{\text{пл}}}, \qquad F = \sqrt{b^2-1},$$

$$F_v = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\begin{array}{c} -E\,\mathrm{arctg}\,D + E\cdot\left(\frac{a^2+(b+1)^2-2b(1+a\sin\theta_{\text{пл}})}{AB}\right)\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{AD}{B}\right) \\ +\frac{\cos\theta_{\text{пл}}}{C}\cdot\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{ab-F^2\sin\theta_{\text{пл}}}{FC}\right)+\mathrm{arctg}\left(\frac{F\sin\theta_{\text{пл}}}{C}\right)\right)\end{array}\right),$$

$$F_h = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\begin{array}{c} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{D} + \frac{\sin\theta_{\text{пл}}}{C}\cdot\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{ab-F^2\sin\theta_{\text{пл}}}{FC}\right)+\mathrm{arctg}\left(\frac{F\sin\theta_{\text{пл}}}{C}\right)\right) \\ -\left(\frac{a^2+(b+1)^2-2b(b+1+ab\sin\theta_{\text{пл}})}{AB}\right)\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{AD}{B}\right)\end{array}\right),$$

$$F_q = \sqrt{F_h^2+F_v^2}; \tag{3.1}$$

- прозрачность атмосферного воздуха τ. Подход нормативной методики для вычисления τ очень упрощён, он не учитывает температуру и влажность атмосферного воздуха:

$$\tau(X) = \exp\left(-0.0007(X - d_{\text{пр}}\cdot 0.5)\right).$$

При $X = 100$ м и $d_{\text{пр}} \in [15.2, 34.8]$ м получаем $\tau \in [0.937, 0.943]$;

- интенсивность теплового излучения I, кВт/м^2 получается из

$$I = E_f\cdot F_q\cdot\tau; \tag{3.2}$$

Поскольку все интервальные величины в формуле (3.2), кроме F_q известны, то будем оценивать область значений геометрического фактора видимости (3.1).

3.2 Реализация и результаты

Для реализации **Алгоритм 3** был выбран язык `Java`. Для данного языка написана библиотека интервальной арифметики `JInterval` [12], разработанная российскими математиками, занимающимися интервальными вычислениями. Главными разработчиками являются Жилин С.И. и Надёжин Д.Ю., которые также занимаются развитием стандарта интервальной арифметики `IEEE P1788`. В данной библиотеке реализован эквивалентный дереву Канторовича способ записи выражений в виде класса `CodeList`, называемый *списком инструкций*. Автоматическое дифференцирование было реализовано в виде класса `Gradient`. Исходный код **Алгоритма 3**, реализованного в виде программного комплекса `MVOpt`, можно найти на сайте:

`https://github.com/Astronautr/MVOpt`.

В работе [6] для параметра интенсивности теплового излучения I верхняя граница интервала получилась равной 256.9 кВт/м^2, которая, по словам автора, явно переоценена. Рассмотрим результаты, полученные Герасименко Д.В. в [3], для оценки параметра геометрического фактора видимости F_q при помощи программного комплекса `IAGO`, написанным Герасименко Д.В., реализующий **Алгоритм 2**, в задаче без учёта связи температуры кипения нефраса и его молекулярной массы, с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$:

Величина	$\min F_q$	$\max F_q$
Значение F_q	0.000026	0.0097961
Время	186.7c.	277.128c.

Таблица 3.1: Таблица результатов `IAGO` для F_q.

Приведём результаты вычислений интервальной оценки геометрического фактора видимости F_q при помощи программного комплекса `MVOpt`, с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$:

Величина	$\min F_q$	$\max F_q$
Значение F_q	0.000084	0.007024
Время	540.4с.	376.8с.

Таблица 3.2: Таблица результатов `MVOpt` для F_q.

Заметим, что интервальная оценка F_q в Таблице 3.1 получилась несколько шире, чем в Таблице 3.2. Добавление новых зависимостей улучшило оценку. Следуя нормативной методике, мы выбираем оценку с наименьшим значением верхней границы. Кроме того `IAGO` не справился с задачей в данной постановке за установленное временное ограничение равное 60 минут и даже увеличение временного ограничения до 11 часов не привело к решению задачи. Так что модификация программный комплекс `MVOpt` привел к решению задачи с бóльшим числом зависимостей и имеет меньшую величину верхней границы геометрического фактора видимости.

Теперь вычислим интервальную оценку параметра интенсивности

$$\boldsymbol{I} = [0.000084, 0.007024] \cdot [0.937, 0.943] \cdot [31.6, 53.2] = [0.0025, 0.3524].$$

Заметим, что первоначальная оценка верхней грани этой величины из работы [6] была переоценена почти в 730 раз.

Из первой строки Таблицы П4.4 Приложения 4 [7] следует, что при заданных параметрах задачи нахождение в течение длительного времени от места аварии будет происходить без негативных последствий. Таким образом поставленная задача оценки риска решена.

Заключение

Была оптимизирована интервальная оценка геометрического фактора видимости. Полученная нами количественная оценка пожарного является самой лучшей среди оценок, полученных Герасименко Д.В [3] и Колесниковым Е.Ю. [6]. Для найденной нами, количественной оценки соответствуя методике [7], найдена качественная оценка величины пожарного риска.

В ходе данной работы был построен интервальный модифицированный алгоритм глобальной оптимизации **Алгоритм 3**, а также написан программный комплекс `MVOpt` для нахождения оценки минимума целевой функции на языке `Java`. Реализованный алгоритм можно использовать в различных оптимизационных задачах с параметрами, представленными в виде интервалов.

Параметрическая неопределённость параметров задачи не помешала её решению интервальными методами. В целом можно сделать вывод, что методы интервального анализа, в частности, развитые в настоящей работе, могут быть успешно применены к решению практических задач оценки рисков, которые имеют параметрические неопределённости в интервальной форме.

Литература

[1] ВитаХим *Нефтяной растворитель Нефрас С50/170 ГОСТ 8505-80.* http://www.vitahim.ru/srclkm/neftyanoj-rastvoritel

[2] Гаганов А.А. *О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных* // Кибернетика. – 1985. – №4 – С. 6–8.

[3] Герасименко Д.В. *Интервальная оценка пожарного риска пролива легко воспламеняющихся жидкостей.* // НГУ, 2016.

[4] ГОСТ 4401-81, *Атмосфера стандартная. Параметры.*

[5] Колесников Е.Ю. *Качественный анализ неопределенности пожарного риска. Сценарий аварии «Пожар пролива ЛВЖ»* // Проблемы анализа риска 2014. – т. 11 – №1 – С. 74–91.

[6] Колесников Е.Ю. *Количественная оценка неопределенности пожарного риска. Сценарий аварии «Пожар пролива ЛВЖ»* // Проблемы анализа риска 2014. – т. 11 – №4 – С. 52–66.

[7] *Об утверждении методики определения расчетных величин пожарного риска на производственных объектах: Приказ МЧС РФ от 10.07.2009 N 404* // Зарегистрировано в Минюсте РФ 17.08.2009 N 14541.

[8] *Строительная климатология СНиП 23-01-99: Государственный комитет Российской Федерации по строительству и жилищно-коммунальному комплексу (Госстрой России)* // Система нормативных документов в строительстве. – Москва, 2003.

[9] Хорошко С.И., Хорошко А.Н. *Сборник задач по химии и технологии нефти и газа Учеб. пособие для сред. спец. учеб. заведений.* – Мн.: Выш. шк., 1989.

[10] Шарый С. П. *Конечномерный интервальный анализ.* – Электронная книга, доступная по адресу `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf`

[11] ЭКСПЕРТ-ОЙЛ *Паспорт качества Нефрас С50/170 ГОСТ 8505-80.* `http://www.expert-oil.com/site.xp/051048050.html`

[12] JInterval `https://java.net/projects/jinterval`

[13] Kreinovich V., Lakeyev A.V., Rohn J., Kahl P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations.* – Dordrecht: Kluwer, 1997.

[14] Moore R.E. *Interval analysis.* – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

[15] Ratschek H., Rokne J. *Computer methods for the range of functions.* – Ellis Horwood Limited, 1984.

[16] Ratschek H., Rokne J. *New Computer Methods for Global Optimization.* – Ellis Horwood Limited, June 1, 2007.