

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра математической теории
микропроцессорных систем управления

Г.Г. Меньшиков

ЛОКАЛИЗУЮЩИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Конспект лекций

Выпуск 4

ВВЕДЕНИЕ В АППРОКСИМАЦИЮ ФУНКЦИЙ

Санкт-Петербург
2003

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Факультета прикладной математики - процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета

УДК 519.95

Меньшиков Г. Г. Локализирующие вычисления: Конспект лекций. Выпуск 4. Введение в аппроксимацию функций. — СПб: НИИ Химии СПбГУ, 2003, 43 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВЫПУСКУ 4

Книга играет роль теоретического введения в Выпуски 5 (что касается асимптотики функций) и 6 (в плане интерполирования).

По сравнению с прототипом [Меньшиков, 2.4], в книгу внесены некоторые изменения. Изменено общее название книги. Изменена библиография. Расширен материал о кусочно-полиномиальном интерполировании.

Для понимания книги достаточно знания Математического Анализа в объёме первого курса технического вуза.

За оказанную помощь при подготовке книги автор благодарит В.Ф. Демьянова, Ю.К. Демьяновича и В.В. Жука.

© Меньшиков Г.Г., 2003

Меньшиков Григорий Григорьевич
ЛОКАЛИЗУЮЩИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
Конспект лекций
Выпуск 4. Введение в аппроксимацию функций.

ГЛАВА 6

ВВЕДЕНИЕ В АППРОКСИМАЦИЮ ФУНКЦИЙ

§ 60. ПРЕДМЕТ, ТИПЫ И МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ

В главе 4 мы рассматривали ситуацию: дана приближённая формула $g(x)$ для некоторой функции $f(x)$, имеется достаточная информация об остатке. Вопрос: как распорядиться этими сведениями для локализирующего расчёта функции $f(x)$, точное выражение которой для вычислений недоступно? Изучив эту тему, мы выяснили, как надо поступать, например, в случае представления остатка $f(x) - g(x)$ элементарной функцией от неопределённого параметра. Предполагалось, что о последнем известен локализирующий отрезок.

Но мы не ставили вопрос о том, как найти подходящую приближённую формулу.

Предмет данной главы и её будущего продолжения в том и состоит, как подобрать приближённое аналитическое выражение для функции, о которой известно нечто. В том числе — как найти численные значения коэффициентов в этом приближённом выражении $g(x)$. Это приближение $g(x)$, возможно, будет служить составным элементом каких-то рассуждений вместо $f(x)$. Например, рассуждений по организации машинных вычислений стандартных функций арифметическими средствами. Так, эта задача решается при создании программного обеспечения вычислительной системы.

В этой главе будем заниматься проблемой исследования остатка приближённой формулы. Касаться будем только функций одного аргумента. Информацию о многомерных случаях читатель получит из книги Бахвалова, которая содержит богатые ссылки на научные публикации.

Итак, нас будут заботить:

- а) структура выражения $g(x) = g(x, a_1, \dots, a_n)$,
- б) коэффициенты a_1, \dots, a_n в этом выражении, так называемые *параметры приближения*,
- в) оценка остатка, достаточно простая в использовании.

Эта информация, следуя § 40, позволила бы строить новые интервальные расширения для $f(x)$, которые позволили бы находить двусторонние локализации для значений этой функции.

Такого рода задачи сплошь и рядом возникают в теоретическом и прикладном анализе.

Ощутив потребность в *аппроксимации (приближении)* функции, мы сразу же возбуждаем перед собой целую серию новых вопросов.

Вопрос первый: что взять в качестве функции g ? □

Естественно, то, что исследователь в силу каких-то причин считает более удобным. Простор для выбора приближающей функции довольно велик.

Пример 60.1. На данном отрезке $[a, b]$ для функции $f(x)$ подбирают степенной полином $p_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$. Не столь уж редкий случай — приближение константой $p_0(x) = a_0$. □

Преимущество этой аппроксимации — лёгкая вычислимость при пользовании ею — в ней участвуют только арифметические операции. Этим облегчается и аналитическая работа с приближённым образом функции в виде полинома. Вот почему к степенным полиномам проявляется в математическом анализе неизменный интерес. Так, напомним следующую *теорему Вейерштрасса (Karl Weierstrass, 1815 – 1897)*, открытую в 1870-е годы.

Теорема 60.1. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой полином $p_n(x)$, что

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Или в равносильной формулировке:

Теорема 60.1а. Любая непрерывная функция на отрезке является пределом равномерно сходящейся последовательности степенных полиномов. □

В 1930-е годы Стоун (*Marshall Harvey Stone*) открыл гораздо более общую теорему об аппроксимации. Теорема Вейерштрасса оказалась её простым следствием. По этому поводу отсылаем читателя к книге Шилова.

Пример 60.2. Весьма перспективно приближение рациональными дробями, т. е. отношениями степенных полиномов. Ясно, что этот, более общий аппарат приближения при тех же вычислительных затратах (время, память) может дать и более высокую точность. Студенту, решившему им заняться, мы рекомендовали бы сначала изучить теорию цепных дробей, раздел

Анализа, мало знакомый нынешним молодым математикам, но развиваемый с XVII века. Она в весьма лаконичной форме изложена в книге Данилова и др. \square

Много конкретных приближений дробями можно найти в книгах Люка, а также Попова и Теслера.

Не всегда приближение преследует чисто вычислительные цели. Иногда оно позволяет модифицировать математическую модель физического явления. Так, известно что достаточно гладкая периодическая функция разлагается в тригонометрический ряд Фурье. Отрезок этого ряда, представляет собой тригонометрический полином:

$$\varphi_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

На этом основании в теоретической радиотехнике особое внимание уделяется приближению периодических сигналов посредством полиномов этого типа.

Итак, тип аппроксимации определяется избранным видом приближающей функции $g(x, a_1, \dots, a_n)$. Естественно желание исследователя, чтобы она была возможно ближе к приближаемой f .

Вопрос второй теории и практики аппроксимации — что понимать под степенью близости функций? \square

На этот вопрос также нет универсального ответа. Имеется много вариаций расстояния между двумя объектами.

Пример 60.3. За меру уклонения $g(x)$ от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ берут, например, число

$$(60.1) \quad \sup_{[a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

в частности, максимум, если он существует. Именно этому варианту меры близости отвечает теорема Вейерштрасса.

Пример 60.4. В качестве меры близости можно брать и площадь, заключённую между графиками этих двух функций в пределах отрезка $[a, b]$, т. е. интеграл $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. \square

В этих двух примерах употребляются разновидности нормы разности $\|f - g\|$.

Тут следует заметить, что норма разности ориентируется на абсолютную погрешность. Между тем, логичнее заботиться об уменьшении той или иной меры относительной погрешности, т. е.

$$\left\| \frac{f-g}{f} \right\| \text{ или } \left\| \frac{f-g}{g} \right\|.$$

Но и норма разности проливает некоторый свет на достигаемую точность.

Вопрос третий. Существует ли наилучшая приближающая функция для данной f при данной мере близости в заданной области допустимого выбора параметров a_1, \dots, a_n ? \square

Пример 60.3 (продолжение). П.Л. Чебышевым (Пафнутий Львович Чебышёв, 1821 – 1894) предполагалась (1850-е годы), а Борелем (Emil Borel, 1871 – 1956) доказана (1900-е годы) следующая

Теорема 60.2. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке, то для данного n существует единственный степенной полином $p_n(x)$, на котором величина (60.1) достигает минимального значения. \square

Приближение по критерию (60.1) называют *чебышёвским приближением*. Со времён Чебышёва многочисленные исследователи усилили и обобщили его результаты, нашли им применение к различным процессам аппроксимации, в различных смыслах расстояния.

Вопрос четвёртый. Как искать наилучшую приближающую функцию, т. е. коэффициенты a_1, \dots, a_n ? \square

Ответ на него зависит в немалой степени от критерия близости. Нередко алгоритмика этого поиска оказывается очень непростой. Студент сможет убедиться в этом, пытаясь освоить методику наилучшего чебышёвского приближения по книгам Березина и Жидкова, а также Бахвалова.

В нашем курсе мы и не будем предпринимать таких попыток. Всё-таки отметим, что задача эта укладывается в рамки теории экстремальных задач.

Вопрос пятый. Если наилучшую приближающую функцию для данной f так трудно найти, то как искать функцию g , обеспечивающую "сносное", хотя и не лучшее приближение? \square

Есть несколько подходов к достижению этой цели. Их следует знать и помнить, что нередко приходится их комбинировать.

Во-первых, метод асимптотических представлений. Он имеет и преимущества и недостатки, с ним предстоит познакомиться в следующем параграфе. К этому подходу можно отнести и пользование формулой Тэйлора.

Во-вторых, применение известных бесконечных представлений аппроксимируемой f в усечённом виде. Так, берут ряд и в качестве приближения для его суммы применяют какую-либо частичную сумму. Так же поступают с бесконечными произведениями для f и с цепными дробями (хотя студент наверняка и не знаком с ними).

Сюда же можно отнести применение интегральных представлений: их приближённо заменяют конечными суммами (предмет одной из следующих глав).

В третьих, интерполирование функции f . С этим методом мы познакомимся в этой главе.

Наконец, в четвёртых, дробление заданного промежутка аппроксимации $[a, b]$ и применение на его частях различных приближений.

Конечно, есть и другие методы аппроксимации.

Вопрос шестой. Приближающая $g(x)$ получена. Как экспериментально измерить меру её близости к $f(x)$? А если $g(x)$ предназначена для вычислений в интервальной манере, то в самом ли деле множество, которое получается интервализацией этой $g(x)$ (согласно § 40), является локализирующим для $f(x)$? И какова его ширина? \square

Очень часто приходится выполнять при поиске $g(x)$ различные дополнительные требования. Примером служит Гипотеза 3 о сохранении, функцией g характера монотонности функции f .

§ 61. АСИМПТОТИКА

КАК ИСТОЧНИК ПРИБЛИЖЕНИЙ

610. Асимптотические эквиваленты и асимптоты

Напомним, что функция $g(x)$ называется *асимптотически* (или *предельно*) *эквивалентной* функции $f(x)$ при $x \rightarrow \Gamma$, если

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \Gamma).$$

Здесь Γ — фиксированная точка $x_0 \in \mathbb{R}$ или один из символов $\pm\infty$. В этом случае пишут:

$$g(x) \sim f(x) \quad (x \rightarrow \Gamma).$$

Частным случаем является ненулевой конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \Gamma} f(x) = l \neq 0 \implies l \sim f(x) \quad (x \rightarrow \Gamma).$$

Действительно, $\frac{f(x)}{l} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \Gamma).$

В курсе Анализа студент работал с понятием линейной асимптоты. Но есть и более общий вариант. Именно, две функции $f(x)$ и $g(x)$ назовём друг для друга *асимптотами* при $x \rightarrow \Gamma$, если

$$f(x) - g(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \Gamma).$$

Вновь конечный предел (на этот раз не обязательно отличный от нуля) оказывается частным случаем.

Как видно, одна и та же пара функций может совмещать оба свойства.

Но вообще эти понятия принципиально различны.

Пример 610.1. Очевидно, $x \sim x + 1$ ($x \rightarrow +\infty$). Но асимптотами друг для друга эти функции не являются.

Нередко для неэлементарных функций удаётся найти элементарный предельный эквивалент.

Пример 610.2. С помощью теоремы Лопиталю студент докажет, что

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{1}{2x} e^{x^2} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

611. Свойства точности асимптотических представлений

Вспомним, что неравенство

$$(611.1) \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

участвует в определении конечного предела l функции $f(x)$ при том или ином условии $x \rightarrow \Gamma$. Левая часть неравенства является абсолютной погрешностью представления функции f посредством числа l . Итак, конечный предел есть приближённое выражение-константа, обладающее для данной функции уникальным свойством: какой бы абсолютной точностью ни задаться (выбором числа ε), начиная с некоторого x (при "движении" к Γ), она достигается.

Этим же свойством по отношению к $f(x)$ обладает и любая асимптота этой функции. Действительно,

$$f(x) = g(x) + (f(x) - g(x)).$$

Как видно, второе слагаемое правой части есть погрешность, стремящаяся к нулю.

Теперь возьмём свойство, равносильное эквивалентности:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \Gamma).$$

Другими словами, $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \rightarrow 0$, т. е. $\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \rightarrow 0$.

Как видно, здесь не абсолютная, а относительная погрешность стремится к нулю. Иначе говоря, какой бы относительной точностью ни задаться, начиная с некоторого x при "движении" к Γ , она достигается. А частный случай, как отмечалось, представляет конечный ненулевой предел. Он также обладает этим равносильным свойством эквивалентности.

Область Анализа, занятую асимптотами, эквивалентностями и их обобщениями, называют *асимптотикой*.

612. Практика получения остаточного члена асимптотического представления

Мы уже знаем, как важно располагать удобным выражением остатка. Рассмотрим частный случай: представление функции её конечным пределом на плюс бесконечности: $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Предположим, что на некоторой полуоси $[a, +\infty[$ существуют непрерывная f' и абсолютно сходящийся интеграл $\int_a^{+\infty} f'(t) dt$. Возьмём $x \in [a, b]$ и запишем:

$$\int_b^x f'(t) dt = f(x) - f(b).$$

Устремляя b к $+\infty$, получим:

$$(612.1) \quad f(x) - l = \int_{+\infty}^x f'(t) dt.$$

Это равенство может служить основой дальнейших представлений погрешности приближения функции конечным пределом.

Пример 612.1. Мы знаем:

$$(612.2) \quad \operatorname{arctg} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Попробуем оценить разность между ними. Согласно (612.1), запишем:

$$\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} = \int_{+\infty}^x \frac{dt}{1+t^2} =$$

Выносим из знаменателя главный ($t \rightarrow +\infty$) член и преобразуя затем по обобщённой теореме о среднем, получаем:

$$= \int_{+\infty}^x \frac{dt}{t^2} \frac{1}{1+1/t^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\theta^2}} \int_{+\infty}^x \frac{dt}{t^2}, \quad \theta \geq x.$$

Интегрируя, получаем:

$$\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{x} \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} = -\frac{\xi(\theta)}{x},$$

где, благодаря возрастанию функции $\frac{\theta^2}{1 + \theta^2} = \xi(\theta)$, для неё справедливо неравенство:

$$(612.3) \quad \xi(\theta) \geq \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Итак, для остатка справедливо выражение (элементарное !) через неопределённый параметр ξ :

$$(612.4) \quad \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\xi}{x}.$$

Можно добавить, что вновь, благодаря возрастанию ξ по θ , справедлива локализация $\xi \in \left[\frac{1}{1 + x^{-2}}, 1 \right]$

Упражнение 612.1. На какой полуоси $[a, +\infty[$ оказывается

$$\left| \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon < 1 \quad ?$$

613. Уточнение асимптотических приближений.

Привлечение новых слагаемых к имеющейся $g(x)$ может повысить точность асимптотического приближения. Для определённости рассмотрим приближение при больших положительных x . Предположим, что уже имеется эквивалентность

$$(613.1) \quad f(x) \sim g_1(x) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Допустим, мы не удовлетворены точностью этого представления. Тогда возьмём остаток $f - g_1$ и применим к нему упрощающее эквивалентное преобразование. Допустим, получилось:

$$\delta_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - g_1(x) \sim g_2(x) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Тогда сумма $g_1(x) + g_2(x)$ оказывается для $f(x)$ более точным приближением, чем $g_1(x)$, в следующем асимптотическом смысле:

$$(613.2) \quad \frac{\delta_2(x)}{\delta_1(x)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

где обозначено $\delta_2(x) = f(x) - g_1(x) - g_2(x)$.

Действительно, запишем:

$$\frac{\delta_2(x)}{\delta_1(x)} = \frac{\delta_1(x) - g_2(x)}{\delta_1(x)} = 1 - \underbrace{\frac{g_2(x)}{\delta_1(x)}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично второму члену асимптотики $g_2(x)$, выделяется третий член:

$$g_3(x) \sim f(x) - g_1(x) - g_2(x)$$

и последующие. Может получиться бесконечное асимптотическое разложение (не обязательно сходящееся). Есть и регулярные методы поиска таких разложений. На практике чаще хватает нескольких членов асимптотики.

Весьма содержательны книги по асимптотике Федорюка, Олвера, Евграфова и др. Читателю, желающему заняться асимптотикой, мы рекомендовали бы сначала ознакомиться с § 4 книги Евграфова (он написан опять же М.В. Федорюком).

614. Относительное приближение функции с нулём

1⁰. Пусть следует приблизить функцию $f(x)$ посредством функции $g(x)$ на $[a, b]$, причём известно, что $f(x_0) = 0$, $x_0 \in [a, b]$.

Составим относительную погрешность:

$$\sigma(x) = \left| \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right|.$$

Если $g(x_0) \neq 0$, то $\sigma(x_0) = 1$. Это значит, что относительная точность мала и потому приближение будет негодным.

С другой стороны, если в некоторой точке $x' \in [a, b]$ функция g обращается в нуль, а f — нет, то в её окрестности $\sigma(x)$ будет бесконечно большой и приближающая $g(x)$ вновь будет негодной.

Вот почему при подборе g следует соблюдать условие:

$$(614.1) \quad f(x) = 0 \iff g(x) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Это — ещё один пример дополнительного условия на приближающую функцию.

Однако этого условия может оказаться недостаточно для возможности хорошей аппроксимации.

2⁰. Пусть теперь $f(x)$ в точке x_0 имеет нуль кратности k , т. е. $f(x) = (x - x_0)^k \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(x_0) \neq 0$, $k > 0$. Тогда имеет смысл усилить условие (614.1) требованием

$$(614.2) \quad f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Упражнение 614.1. Убедиться в этом. □

Продолжим. Перепишем (614.2):

$$g(x) \sim (x - x_0)^k \varphi(x).$$

Отсюда

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(x)}{(x - x_0)^k} \sim \varphi(x).$$

Отсюда, в свою очередь,

$$(614.3) \quad g(x) = (x - x_0)^k \psi(x),$$

где $\psi(x) \sim \varphi(x)$ и вследствие этого существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \varphi(x_0) \neq 0.$$

Доопределив $\psi(x)$ значением $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$, получим непрерывную $\psi(x)$ на всём $[a, b]$, причём $\psi(x_0) \neq 0$.

Таким образом, из требования (614.2) следует, что нужно подбирать для $f(x)$ функцию того же типа, т. е. имеющую в точке x_0 нуль кратности k , причём в остальном подбирать множитель $\psi(x)$ с дополнительным условием: он должен равняться своему аналогу в составе функции f — в точке x_0 :

$$(614.4) \quad \psi(x_0) = \varphi(x_0).$$

Пример 614.1. Так, приближающая функция для $\ln x$ должна иметь вид:

$$g(x) = (x - 1)\psi(x),$$

так как $x_0 = 1$ — простой нуль для логарифма. Выясним, чему должно равняться $\psi(1)$. Для этого запишем представление логарифма: $\ln x = (x - 1)\varphi(x)$. Отсюда

$$\varphi(x) = \frac{\ln x}{x - 1} \quad (x \neq 1).$$

По теореме Лопиталю тогда $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1$. Поэтому и предел ψ должен равняться 1. Проще потребовать от ψ непрерывности и равенства $\psi(1) = 1$. □

От примера вернёмся к общим рассуждениям. Выясним, что следует делать дальше, после выяснения структуры функции $g(x)$. Перепишем теперь выражение относительной погрешности:

$$\sigma(x) = \left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right|.$$

Из него видно, что теперь надо заниматься приближением функции $\varphi(x)$ посредством дальнейшего выбора функции $\psi(x)$ с соблюдением равенства $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$.

615. Относительное приближение функции с полюсом

Теперь пусть функция с полюсом кратности k :

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^k}$$

приближается на промежутке $[a, x_0]$, одним из концов которого этот полюс является. Предполагается, что множитель $\varphi(x)$ непрерывен на $[a, x_0]$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

Проведя рассуждения, аналогичные предыдущему пункту, можно придти к выводу: в качестве приближающей функции следует взять функцию с тем же полюсом той же кратности:

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{(x - x_0)^k},$$

где $\psi(x)$ непрерывна на $[a, x_0]$ и $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$.

Пусть эти рассуждения проведёт студент (с выносом на экзамен). Очевидно, что вывод относительно дальнейшей работы по подбору $\varphi(x)$ — тот же.

Пример 615.1. Предположим, проектируется арифметическое приближение для $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $] - \pi/2, \pi/2[$. Известно, что концы этого промежутка являются для тангенса простыми полюсами (т. е. $k = 1$). Другими словами,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\varphi(x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left(x + \frac{\pi}{2}\right)},$$

где φ непрерывна на $] - \pi/2, \pi/2[$ и не обращается в нуль на концах. Отсюда следует:

$$\varphi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x.$$

Пусть студент сам найдёт эти пределы. Отсюда видно, что нужно применить аппроксимацию:

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \psi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right).$$

616. О точности асимптотических представлений на промежутке

Из выражения относительной погрешности

$$\sigma(x) = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right|$$

видно, что $\sigma(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \Gamma$). Это значит, что $\sigma(x)$ становится сколь угодно малой за счёт "стягивания" точки x к элементу Γ (т. е. либо к точке $\Gamma \in R$, либо достаточного удаления на $-\infty$ или $+\infty$, смотря от конкретного Γ). Таким образом, можно добиваться произвольно высокой точности формулы $f(x) \sim g(x)$, но лишь за счёт сужения промежутка аппроксимации. Отсюда же видно, что промежуток этот должен быть:

- окрестностью точки x_0 , если $\Gamma = x_0$;
- правой полуосью $[a, +\infty[$, если $\Gamma = +\infty$;
- левой полуосью $] -\infty, b]$, если $\Gamma = -\infty$;
- левой полукрестностью точки x_0 , если $\Gamma = x_0 - 0$;
- правой полукрестностью точки x_0 , если $\Gamma = x_0 + 0$.

Вообще, относительная (и абсолютная) точность резко различается в разных частях промежутка аппроксимации. Высокая точность гарантируется, повторяем, только "поблизости" от Γ .

Поэтому в чистом виде асимптотика как источник приближений употребляется на практике редко. Гораздо чаще — как элемент теоретических рассуждений или в комбинации с другими методами практической аппроксимации.

Пример 616.1. В двух предыдущих пунктах мы видели, что на удовлетворении условия $\psi(x) = \varphi(x)$ работа по подбору множителя $\psi(x)$ не заканчивается; наоборот — предстоит поиск коэффициентов в составе $\varphi(x)$.

617. Формула Тэйлора как асимптотическое представление функции

Формулу Тэйлора можно рассматривать также как асимптотическое представление, содержащее, вообще говоря, несколько членов асимптотики.

Так, если $f(x_0) \neq 0$, то понятно, что

$$f(x) \sim f(x_0) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Предположим теперь для простоты рассуждений, что функция f имеет в окрестности точки x_0 производные всех порядков. Рассмотрим разность $f(x) - f(x_0)$. Запишем в виде ряда Тэйлора:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \sum_{k \geq 2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Дополнительно предположим сходимость этого ряда в некоторой окрестности точки x_0 . Имея в виду $x \neq x_0$, разделим на первое слагаемое правой части:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} = 1 + \sum_{k \geq 2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k! \cdot f'(x_0)} (x - x_0)^{k-1}.$$

Как видно, \sum в правой части при $x \rightarrow x_0$ аннулируется и потому левая часть стремится к 1. Таким образом:

$$f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Получен очередной член асимптотики.

Эти рассуждения можно провести для общего члена.

Другими словами, формула Тэйлора состоит из суммы первого, второго и прочих членов асимптотики при $x \rightarrow x_0$. Что особенно ценно, имеется явное выражение остатка.

Но ввиду "асимптотичности" формулы Тэйлора есть основание считать, что ей присущ тот же порок точности, который установлен в предыдущем пункте: высокая точность обеспечивается только "около" точки x_0 .

Правда, на первый взгляд, произвольно высокой точности можно добиться за счёт увеличения числа членов. Но это возможно далеко не всегда, поскольку зависит от ширины промежутка аппроксимации, значений "младших" производных, поведения старшей.

Таковы преимущества и недостатки асимптотических выражений вообще. Их надо иметь в виду при пользовании этим математическим инструментом.

§ 62. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

620. Суть метода

Как и раньше, через $f(x)$ обозначаем приближаемую функцию, через $g(x) = g(x, a_1, \dots, a_n)$ — приближающую. Суть метода интерполяции состоит в том, что выбором чисел a_1, \dots, a_n добиваются равенства

$$(620.1) \quad f(x_j) = g(x_j)$$

в фиксированных точках x_1, \dots, x_n — узлах интерполяции.

При этом надеются на то, что, ввиду равенства погрешности нулю в узлах, и в остальных точках она будет небольшой.

Обычно число узлов полагают равным числу параметров интерполяции a_i . Поэтому для отыскания последних решают систему (620.1) уравнений типа $n \times n$ относительно a_i .

621. Интерполирование линейными комбинациями параметров

Дело сильно упрощается, если брать интерполирующую функцию в виде линейной комбинации параметров:

$$g(x) = g(x, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x),$$

где функции $g_i(x)$ уже не зависят от параметров. Тогда интерполяционные условия (620.1) образуют систему линейных алгебраических уравнений:

$$(621.1) \quad \sum_{i=1}^n a_i g_i(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n.$$

И, если определитель системы

$$(621.2) \quad \Delta = \det(g_i(x_j))_{i,j=1}^n \neq 0,$$

то решение (a_1, \dots, a_n) единственно. Об этом заботятся при выборе узлов и "базовых" функций g_1, \dots, g_n .

622. Недостаточность линейной независимости системы базовых функций

Важно, чтобы $\Delta \neq 0$ при любом расположении узлов. Может показаться, что для этого хватает линейной независимости системы функций g_1, \dots, g_n . На самом деле это не так.

Пример 622.1. Возьмём $n = 2$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = \sin x$. Это — линейно независимые функции. Примем узлы: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорию этого вопроса можно найти у Березина и Жидкова, том 1. Мы без неё пока обойдёмся, так как детально рассмотрим интерполирование только степенными полиномами.

623. Зависимость интерполирующей функции от узловых значений

Как известно из курса Алгебры, решение системы линейных уравнений представляет собой линейную комбинацию свободных членов. Поэтому

$$(623.1) \quad a_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} f(x_j).$$

Здесь γ_{ij} уже не зависят от узловых значений $f(x_j)$.

Подставим это в выражение $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} f(x_j) g_i(x) =$$

перегруппируем:

$$= \sum_{j=1}^n f(x_j) \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} g_i(x).$$

Получено явное выражение $g(x)$ через узловые значения $f(x_j)$:

$$(623.2) \quad g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \psi_j(x).$$

где обозначено

$$\psi_j(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} g_i(x).$$

Весьма удачно, что получилось оно в виде линейной комбинации.

Сейчас выясним важное свойство множителей при узловых значениях.

Лемма 623.1. Справедливо соотношение:

$$(623.3) \quad \psi_j(x_i) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}.$$

Доказательство. Обозначив $y_j = f(x_j)$, запишем:

$$g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \psi_j(x).$$

Подставим сюда $x = x_i$. Так как $g(x_i) = y_i$ получим

$$(623.4) \quad y_i = \sum_{j=1}^n y_j \psi_j(x_i).$$

Рассмотрим y_i как независимые переменные. Тогда последнее равенство является тождеством. Как мы раньше установили, значения $\psi_j(x_i)$ от них не зависят. Зная это, продифференцируем (623.4) по y_i . Тогда получим следующее. Если $i \neq j$, то $0 = \psi_j(x_i)$. Если же $i = j$, то $1 = \psi_j(x_i)$, что и требовалось доказать.

624. Об интерполировании по Эрмиту

Так называется интерполирование, при котором требуют в узлах не только равенства функций, приближаемой и приближающей, но и их производных:

$$f'(x_j) = g'(x_j).$$

Это даёт шанс на увеличение точности.

С этим вопросом можно познакомиться по первому тому книги Березина и Жидкова.

Замечание 624.1. Формулу Тэйлора можно рассматривать как предельный вариант интерполирования по Эрмиту (Charles Hermite, 1822 – 1901). В самом деле, в начальной точке x_0 достигается равенство функции f и полинома — главной части формулы Тэйлора. Равенство имеет место и для нескольких производных.

§ 63. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

630. Базовые функции. Возможность интерполирования

Возьмём степенные базовые функции: $1, x, \dots, x^{n-1}$. Тогда, интерполирующая функция оказывается степенным полиномом:

$$g(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}.$$

Составим условия интерполяции:

$$a_1 + a_2x_j + a_3x_j^2 + \dots + a_nx_j^{n-1} = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда видно, что в этом случае Δ является определителем Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Из курса Алгебры известно, что он не равен 0, если числа x_j — разные. Вот почему интерполирование степенными полиномами возможно при любом выборе различных узлов.

631. Форма Лагранжа интерполирующего полинома

Запишем этот полином как линейную комбинацию узловых значений:

$$g(x) = f(x_1)\psi_1(x) + \dots + f(x_n)\psi_n(x).$$

Ясно, что $\psi_i(x)$ — полиномы степени не выше $n - 1$ (почему?). Поэтому они разлагаются в произведения не более $n - 1$ линейных множителей. Так как по лемме 623.1

$$\psi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases},$$

то $\psi_i(x)$ обращается в нуль $n - 1$ раз именно в точках x_i . Значит, пишем произведение $n - 1$ линейных множителей:

$$\psi_i(x) = \alpha_i \prod_{j \neq i} (x - x_j), \quad \alpha_i = \text{const} \neq 0.$$

Условие $\psi_i(x_i) = 1$ позволяет найти α_i . Оно записывается в виде

$$\alpha_i \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) = 1,$$

откуда

$$\alpha_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

В результате получаем для $g(x)$ форму:

$$(631.1) \quad g(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \underbrace{\prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}}_{= \psi_i(x)}.$$

Это выражение и называется *интерполяционным полиномом Лагранжа*.

632. Остаточный член

1⁰. Пусть $f(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемая функция, а $g(x)$ интерполирующий её в n узлах степенной полином. Как мы знаем, $g(x)$ тогда имеет степень не выше $n - 1$.

Погрешность интерполирования $r(x) = f(x) - g(x)$ обращается в нуль по крайней мере в n узлах. Однако по ряду причин

(они станут ясны ниже) важно, чтобы обращение в нуль происходило в $n + 1$ точках. Понятно, что для $\delta(x)$ это не гарантировано. Поэтому модифицируем погрешность, вводя вспомогательную функцию

$$\eta(x) = r(x) - \gamma \omega(x),$$

где $\omega(x)$ — вспомогательный полином n -й степени, имеющий нулями узлы и потому равный

$$\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Что касается γ , то это — константа, которую ещё предстоит найти. Понятно, что

$$\eta(x_j) = 0 \quad (j = 1 \dots n).$$

Возьмём произвольную точку x_0 — не узел и за счёт выбора γ заставим её стать нулём для $\eta(x)$. Докажем, что это возможно. Действительно,

$$\eta(x_0) = 0 \quad \iff \quad f(x_0) - g(x_0) - \gamma \omega(x_0) = 0.$$

Так как $\omega(x_0) \neq 0$, то это равносильно соотношению

$$\gamma = \frac{f(x_0) - g(x_0)}{\omega(x_0)},$$

Теперь $\eta(x)$ обращается в нуль $n + 1$ раз.

2⁰. По теореме Ролля $\eta'(x)$ обратится в нуль не менее n раз, по той же теореме $\eta''(x)$ — не менее $n - 1$ раза и т. д., $\eta^{(n)}(x)$ обратится в нуль не менее одного раза. Обозначим нуль функции $\eta^{(n)}(x)$ через ξ , т. е.

$$\eta^{(n)}(\xi) = 0.$$

Расшифруем это:

$$f^{(n)}(\xi) - g^{(n)}(\xi) = \gamma \omega^{(n)}(\xi).$$

Здесь $g^{(n)}(\xi) = 0$ (g — полином степени не выше $n - 1$), а $\omega^{(n)}(\xi) = n!$ (ω — полином степени n). Равенство принимает вид:

$$f^{(n)}(\xi) = \gamma n!$$

и мы находим:

$$\gamma = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

— более удобное для применений выражение, чем выше.

В нём число ξ по теореме Ролля расположено на отрезке, образованном нулями функции $\eta(x)$:

$$\xi \in V(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \vee\{x, x_1, \dots, x_n\}.$$

3⁰. С самого начала нас интересовала погрешность для произвольного значения аргумента x . Но мы уже выбрали произвольный x_0 . Перед прочими значениями x у него то преимущество, что $\eta(x_0) = 0$. Благодаря этому из выражения $\eta(x)$ следует:

$$r(x_0) = \gamma \omega(x_0).$$

Остаётся переименовать x_0 в x и подставить сюда последнее выражение для γ :

$$(632.1) \quad r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x).$$

Здесь, как отмечалось, $\xi \in V(x)$ — см. рис. 632.1.

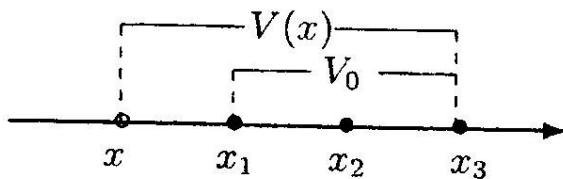


Рис. 632.1

Из этого рисунка видно, что отрезок $V(x)$ сузится до отрезка $V_0 = \vee\{x_1 \dots x_n\}$, если поместить x между узлами, т. е. в V_0 . В этом случае множество локализации точки ξ минимально. Поэтому имеет смысл интерполировать именно между узлами.

Иначе говоря, отрезок локализации погрешности

$$\frac{f^{(n)}(V(x)) \omega(x)}{n!} \text{ сужается до } \frac{f^{(n)}(V_0) \omega(x)}{n!} \text{ при выборе } x \text{ в } V_0.$$

633. Интервализация интерполяционной формулы

Итак, для приближения данной нам функции $f(x)$ мы решили построить $g(x)$ интерполяционным методом. Взяли узлы, получили интерполяционный полином Лагранжа, исследовали погрешность (остаток). Понятно, что в точках x , не являющихся узлами, мы точное значение $f(x)$ не восстановим. Более того, мы вряд ли

восстановим его и в узлах — из-за вычислительных машинных погрешностей. Получить локализаторы для $f(x)$ — можем. Но для этого надо считать на компьютере в интервальной манере.

Таким образом, для применения интерполяционной формулы нужен её интервализованный вариант. Он создаётся примерно так же, как описано в § 40.

Именно, берём выражение приближаемой $f(x)$ через интерполяционный полином $g(x)$ с учётом остатка $r(x) = f(x) - g(x)$:

$$(633.1) \quad f(x) = g(x) + r(x).$$

Подставляем сюда выражение остатка. Тогда

$$(633.2) \quad f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x).$$

Расширяем здесь ξ до локализирующего отрезка:

$$(633.3) \quad f(x) \in g(x) + \frac{f^{(n)}(V_0)}{n!} \omega(x).$$

Теперь в правой части имеем композицию стандартных функций и множества $f^{(n)}(V_0)$. Остаётся проводить композиционный интервальный расчёт. Нужно только располагать информацией о $f^{(n)}(V_0)$:

- а) в виде выражения: $f^{(n)}(x),$
- или
- б) в виде включения типа: $f^{(n)}(V_0) \subseteq F^{(n)}(V_0),$
- или
- в) в виде неравенства; например: $\sup_{V_0} |f^{(n)}(x)| \leq \nu_0.$

Здесь через $F^{(n)}$ обозначено интервальное расширение $f^{(n)}$.

Последний случай приводит к включению

$$r(x) \in \frac{|\omega(x)|}{n!} [-\nu_0, \nu_0].$$

634. Влияние размазанности узловых значений интерполируемой функции

Снова запишем полином Лагранжа:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \psi_i(x), \quad \psi_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Вполне реален случай, когда по каким-либо причинам значения $f(x_i)$ в точности неизвестны. Тогда при нахождении $g(x)$ возникает ещё один источник погрешности, а для математика-вычислителя — ещё один источник интервализации.

Пример 634.1. Значения $f(x_i)$ получены посредством измерения некоторых физических величин: длин, напряжения, сопротивления и т. п. Ясно, что измерение не может дать абсолютно точные результаты.

Пример 634.2. Весьма часто интересующая нас функция f имеет неудобное аналитическое выражение. Например — интеграл. Её аппроксимируют, чтобы получить более простое выражение. В случае интерполирования для этого находят отдельные значения $f(x_i)$, пользуясь имеющимся неудобным выражением. Понятно, что при этом совершаются как правило ошибки, причём неудобство для расчёта выражения f этому способствует. Поэтому, когда интерполирующую функцию $g(x)$ готовят для будущего применения, в неё вынужденно закладываются неверные коэффициенты, если работают в традиционной манере. Интервальная же манера предусматривает "размазанность" узловых значений приближаемой функции.

Поэтому при подготовке интерполирующей функции надо предусматривать использование не числовых значений $f(x_i)$ а локализирующих вилок $F(x_i)$ для них.

Таким образом, от расшифровки включения (633.3):

$$f(x) \in \sum_{i=1}^n f(x_i)\psi_i(x) + \frac{f^{(n)}(V_0)}{n!}\omega(x)$$

перейдём к включению с более широкой правой частью — с учётом размазанности:

$$f(x) \in \underbrace{\sum_{i=1}^n F(x_i)\psi_i(x)}_{G(x)} + \frac{f^{(n)}(V_0)}{n!}\omega(x) \stackrel{def}{=} F_{\text{интерп}}(x).$$

Таково выражение интерполирующего локализатора.

В реальном расчёте, разумеется, вместо $\psi_i(x)$ фигурируют их интервальные расширения, вместо арифметических операций — их интервальные аналоги. Тогда благодаря Второй Теореме о композициях эта вилка действительно будет содержать искомое $f(x)$.

Представляет интерес ширина составляющей $G(x)$ интерполирующего локализатора, который вызван размазанностью значений $f(x_j)$. Подсчитаем её:

$$w(G(x)) = w\left(\sum_{i=1}^n F(x_i)\psi_i(x)\right) =$$

применяем свойства ширины, предполагая, что $\psi_i(x)$ — числа (вновь идеальная модель):

$$(634.1) \quad = \sum_{i=1}^n |\psi_i(x)| w(F(x_i)).$$

Оценим это сверху через наибольшую ширину:

$$w(G(x)) \leq \lambda(x) \max_j w(F(x_j)).$$

Здесь

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^n |\psi_i(x)|$$

— функция Лебега данного способа интерполирования. Она и служит численным показателем влияния размазанности узловых значений, своего рода "коэффициентом усиления". Интересно прикинуть порядок этой функции. Её значение в узлах легко вычисляется благодаря лемме 623.1 о свойстве функций $\psi_i(x)$:

$$\lambda(x_j) = \sum_{i=1}^n |\psi_i(x_j)| = 1.$$

Значения функции Лебега могут ответить на вопрос: между какими узлами выгоднее всего интерполировать? Понятно, что там, где $\lambda(x)$ оказывается меньше. Но обсуждение этой темы отложим до следующего параграфа.

Замечание 634.1. Можно было бы учесть ещё возможную "размазанность" по некоторому отрезку X значения x . Пусть читатель подумает об этом сам.

635. Частный случай: линейное интерполирование

Имеется в виду интерполирование полиномом первой степени, т. е. графически — хордой (см. рис. 635.1).

Запишем включение для остатка:

$$r(x) \in \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(V_0)$$

или в данном случае

$$r(x) \in \omega(x) \frac{f''([x_1, x_2])}{2},$$

так как $n = 2$.

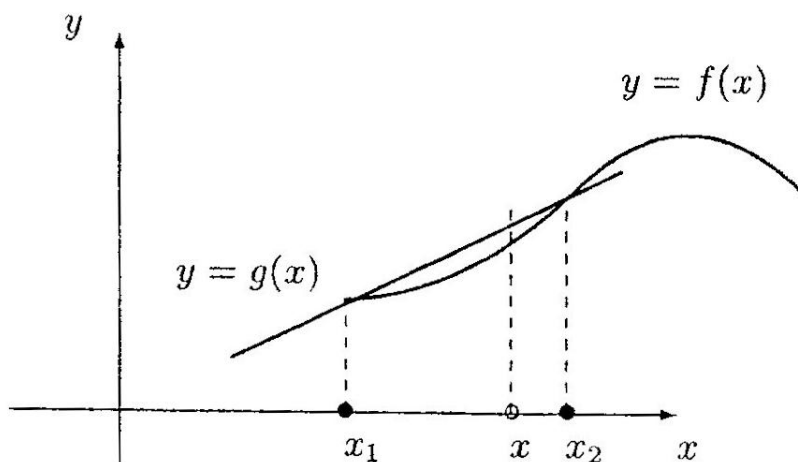


Рис. 635.1

При этом

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Подсчитаем $\omega([x_1, x_2])$. Ясно, что $\omega(x) \leq 0$ при $x \in [x_1, x_2]$. Таким образом, $\max \omega(x) = 0$. Чтобы найти минимум, раскроем скобки:

$$\omega(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Дифференцируя, выясняем, что средняя точка является стационарной, вследствие чего после подстановки оказывается

$$\min \omega = -\frac{(x_2 - x_1)^2}{4}. \text{ Итак, } \omega([x_1, x_2]) = -\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} [0, 1].$$

Поэтому из включения для остатка, с которого мы начали, получаем новый вариант включения, не зависящий от x (нужны разные включения, "и те, и те"):

$$(635.1) \quad r(x) \in -\frac{(x_2 - x_1)^2}{8} f''([x_1, x_2]) [0, 1].$$

Впрочем, отсюда следует оценка традиционного вида:

$$(635.2) \quad |r(x)| \leq \frac{(x_1 - x_2)^2}{8} \sup_{[x_1, x_2]} |f''|.$$

Выразим теперь множители при узловых значениях

$$\psi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

В данном случае произведение состоит только из одного множителя:

$$\psi_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad \psi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Функция Лебега:

$$\lambda(x) = |\psi_1(x)| + |\psi_2(x)| = \frac{(x_2 - x) + (x - x_1)}{x_2 - x_1} = 1.$$

Поэтому $w(G(x)) \leq \max_{j=1, 2} w(F(x_j))$.

Упражнение 635.1. Ориентируясь на включение (635.1) и свойство ширины $1^{\text{шн}}$ (п. 323), доказать, что

$$(635.3) \quad w(r(x)) \leq w\left(f''([x_1, x_2])\right) + \sup_{[x_1, x_2]} |f''|.$$

§ 64. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

640. Нормализация переменной и узлов

До сих пор рассматривался общий случай, когда узлы расположены как угодно (рис. 640.1а).

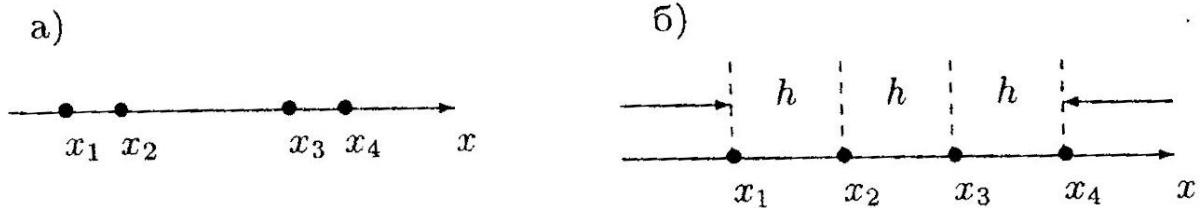


Рис. 640.1

Однако имеет практический интерес случай узлов, находящихся друг от друга на фиксированном одинаковом расстоянии h (рис. 640.1б). Этот случай допускает провести некоторую стандартизацию интерполяционного полинома.

Введём точку $x_0 = x_1 - h$ и проведём замену переменной x и узловых её значений x_j на новую переменную t и соответствующие узлы согласно рис. 640.2.

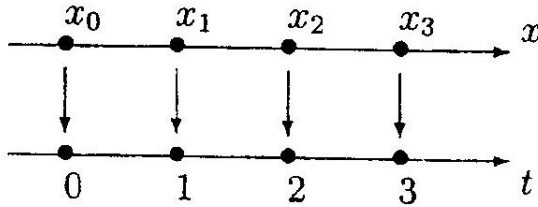


Рис. 640.2

Новое расстояние между соседними узлами примем равным 1. Возьмём линейную замену x на t . Тогда оказывается:

$$(640.1) \quad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Так как $x_k = x_0 + kh$, то $t_k = \frac{x - x_0}{h} = k$. Наоборот, выразим x через t : $x = x_0 + th$.

Независимую переменную t можно назвать *нормализованным аргументом*. Прежнюю переменную x — *натуральным аргументом*.

Плодами нормализации воспользуемся в следующем пункте.

641. Нормализованный полином Лагранжа

Выразим в новой переменной функции $\psi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. После подстановки x в x_j и разного рода упрощений получается:

$$(641.1) \quad \psi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{t - j}{i - j} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_i^{\text{норм}}(t).$$

Как видно, функции эти освободились от узлов. Их выражения теперь универсальны. Полином Лагранжа принял вид:

$$(641.2) \quad g(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \psi_i^{\text{норм}}(t).$$

Конечно, перед практическим применением интерполирующей формулы по данному x следует найти t согласно формуле (640.1)

и затем по этому t вычислить $g(x)$. В интервальной же манере по локализирующему отрезку X для x следует подсчитать согласно (640.1) локализацию для t и т. д.

Посмотрим, как в новой переменной t запишется множитель в представлении остатка. Пишем:

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = h^n \underbrace{\prod_{i=1}^n (t - i)}_{\omega^{\text{норм}}(t)} = h^n \omega^{\text{норм}}(t).$$

Теперь представление остатка таково:

$$r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} h^n \omega^{\text{норм}}(t).$$

Отсюда видно, что уменьшение шага между узлами (т. е. константы h) вызывает гораздо более сильное уменьшение остаточного члена (поскольку $n \geq 2$).

На практике столь быстрое убывание погрешности в самом деле имеет место, но лишь для исходных функций высокой гладкости.

642. Нормализованный интерполяционный локализатор

Теперь по выражению для $F^{\text{интерп}}(x)$ из п. 634 пишем:

$$f(x) \in F^{\text{интерп}}(x) = \sum_{j=1}^n F(x_j) \psi_j^{\text{норм}}(t) + \frac{h^n \omega^{\text{норм}}(t)}{n!} f^{(n)}(V_0).$$

Функция же Лебега равна $\lambda(x) = \sum_{j=1}^n |\psi_j^{\text{норм}}(t)| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{\text{норм}}(t)$.

643. О пригодности для интерполирования разных участков между узлами

Как отмечено, нежелательны для интерполирования те участки между узлами, где особенно велики $\lambda^{\text{норм}}(t)$ и $|\omega^{\text{норм}}(t)|$. Поэтому нас интересуют локальные максимумы этих функций на упомянутых участках:

$$\lambda_k = \max_{[k, k+1]} \lambda^{\text{норм}}(t), \quad \omega_k = \max_{[k, k+1]} |\omega^{\text{норм}}(t)|.$$

Практически интересен вопрос: где расположены наименьшие из этих максимумов?

Теорема 643.1 (о минимаксах функции Лебега и модуля узлового полинома). Наименьший из λ_k и наименьший из ω_k достигаются:

при чётном n на среднем из промежутков $[k, k + 1]$, □
 при нечётном n — на двух средних промежутках.

См. по этому поводу рис. 643.1.

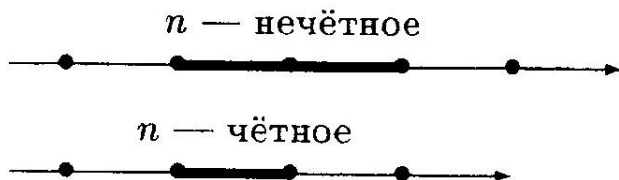


Рис. 643.1

Что касается ω_k , то теорема опирается на следующую лемму, которая доказана в приложении (п. 644). Что касается λ_k , то доказательство можно найти в статье Меньшикова [1].

Лемма 643.1 (о наименьшем максимуме модуля узлового полинома). Наименьшее из чисел ω_k достигается при чётном n в средней точке между крайними узлами и равно

$$(643.1) \quad \omega_n \stackrel{\text{def}}{=} \min_k \omega_k = \frac{n! \cdot (n-1)!!}{n!! \cdot 2^n} = \frac{(n-1)!!^2}{2^n},$$

а при нечётном n на двух интервалах, примыкающих к средней точке. В последнем случае для него верно включение:

$$(643.2) \quad \omega_n \in \frac{(n-2)!!^2 n}{2^n} \left[1, 1 + \frac{1}{n} \right].$$

Замечание 643.1. Для $n = 2$ имеем (согласно п. 635) $\lambda(x) = 1$, и по равенству (643.1) $\omega_2 = \frac{1}{8}$. Для случая же квадратичного интерполирования ($n = 3$) обнаружено, что минимальные λ_k и ω_k равны соответственно 1 и $\frac{1}{9\sqrt{3}}$.

644. Вариант кусочно-полиномиального интерполирования

Ясно, что для приближения функции на сколько-нибудь широком промежутке надо располагать несколькими интерполяционными полиномами. Опишем вариант организации такого интерполирования, имея в виду средний промежуток между узлами. Наши рассуждения иллюстрируются рис. 644.1. Принято

$n = 4$, так что есть единственный средний $[k, k + 1]$ промежуток приближения.



Рис. 644.1

На этом рисунке верхняя горизонталь представляет ось нормализованной переменной t . Цифрами на ней отмечены значения абсциссы. В качестве промежутка приближения взят $[2, 6]$. На прочих горизонталях указано расположение узлов для частичных промежутков приближения $[k, k + 1]$, $k = 2, 3, 4, 5$. От каждого частичного промежутка с оси t идёт стрелка, которой показывается, как выбраны узлы интерполяции. Так, промежуток $t \in [2, 3]$, обслуживается узлами $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. Они выбраны с тем расчётом, чтобы $[2, 3]$ оказался средним промежутком между узлами. При переходе x с отрезка $[2, 3]$ на отрезок $[3, 4]$ меняется и набор узлов. Новый набор показан на горизонтали III и расположен из тех же соображений.

Замечание 644.1. Таким образом, приближение исходной функцией f осуществляется некоторой кусочно-полиномиальной функцией. Функция эта непрерывна: между узлами ввиду непрерывности полиномов, в узлах разрывы отсутствуют потому, что оба смежных полинома "левый" и "правый" по отношению к данному узлу интерполируют в этом узле одну и ту же f и потому имеют равные значения. Аналогичным образом организованное эрмитово интерполирование по тем же причинам порождает кусочно-полиномиальную приближающую функцию с непрерывной производной.

Замечание 644.2. Случай нечётного n отражён на рис.644.2. Предоставляем читателю самостоятельно разобраться в нём.



Рис. 644.2

Замечание 644.3. Такого рода "кусочные" приближающие функции различной степени гладкости называются сплайнами. Теория и практика их применения интенсивно развиваются последние десятилетия. По этому вопросу можно читать книгу Завьялова и др..

645. Сравнение точностных характеристик формулы Тэйлора и интерполирования по Лагранжу

Мы видели, что интерполирование степенными полиномами по Лагранжу имеет характеристики точности, сходные с теми, которые имеет формула Тэйлора.

Действительно, опираясь на $n + 2$ параметров

$$x_1, h, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n),$$

остаточный член Лагранжа согласно п. 641, имеет вид

$$r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} h^n \omega^{\text{норм}}(t),$$

где расстояние между узлами принято равным h .

Возьмём, к примеру, случай нечётного n , когда между узлами имеется два средних промежутка, прилегающих в средней точке между узлами (рис. 644.1). На них, как показано в п. 643 и 644,

кусочное интерполирование по Лагранжу более привлекательно, чем на других. Именно, в промежутке интерполирования

$$|r(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} h^n \omega_n.$$

Аппроксимацию по Тэйлору разумно применить тоже в кусочном варианте, беря для каждого комплекта узлов начальную точку x_* в пределах объединённого среднего отрезка. Берём обозначение x_* вместо прежней начальной точки x_0 , во избежание путаницы с рассуждениями по нормализации в п. 640.

Формулу Тэйлора приведем также к $n + 2$ параметрам $x_*, h, f(x_*), f'(x_*), \dots, f^{n-1}(x_*)$.

Тогда

$$(645.1) \quad f(x) = f(x_*) + \frac{f'(x_*)}{1!} (x - x_*) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_*)}{(n-1)!} (x - x_*)^{n-1} + r(x);$$

её остаточный член, согласно п. 410 (Выпуск 3) примет вид:

$$r(x) = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!} (x - x_*)^n,$$

откуда

$$|r(x)| = \left| f^{(n)}(\theta) \right| \frac{|x - x_*|^n}{n!}.$$

Тем самым мы формулу Тэйлора приспособили к сравнению с интерполированием по Лагранжу.

Решим задачу о наивыгоднейшем расположении точки x_* , исходя из того же критерия минимакса для множителя при неопределённом члене с производной в выражении абсолютной погрешности, что и в задаче о выборе участка между узлами для интерполирования (п. 643).

Именно, докажем следующую лемму.

Лемма 645.1 (о минимаксе числового множителя в остатке формулы Тэйлора). Пусть промежуток $[a, b]$, где осуществляется приближение посредством формулы (645.1), зафиксирован. Минимакс

$$(645.2) \quad \min_{x_* \in R} \max_{x \in [a, b]} |x - x_*|^n$$

достигается по x при $x = a$ и $x = b$, а по x_* при $x_* = \frac{a+b}{2}$. Таким образом, минимакс равен

$$(645.3) \quad \frac{1}{n!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^n$$

Доказательство. Примем сначала $x_* \notin [a, b]$.

Фиксируя пока точку x_* , находим, что $|x - x_*|$ достигает максимума по x , когда аргумент x попадает в дальний от x_* конец отрезка $[a, b]$. Ясно, что этот максимум будет уменьшаться с приближением x_* к отрезку $[a, b]$. Когда отрезок будет достигнут, окажется $|x - x_*| = b - a$.

Пусть теперь $x_* \in [a, b]$. По-прежнему максимум по x будет достигаться на дальнем от x_* конце отрезка. Допустим, что это — точка a . Тогда максимум будет уменьшаться с приближением x_* к a до тех пор, пока x_* не станет равноудалённой от концов отрезка.

Наконец, подставляя указанные экстремальные значения в (645.2), получим (645.3). \square

Оставив в покое неопределённые параметры ξ и θ , играющие, кстати, одну и ту же роль аргументов старшей производной, сравним множители при её абсолютной величине. А именно, сравним числа

$$\nu^T = \frac{h^n}{n!} \quad \text{и} \quad \nu^L = \frac{h^n \omega^{\text{норм}}(t)}{n!}.$$

Или, что тоже самое, числа

$$(645.4) \quad 1 \quad \text{и} \quad \omega_n.$$

При $n = 3$ сравниваем, согласно замечанию 643.1, 1 с $\frac{1}{9\sqrt{3}}$. В этом случае Тэйлор хуже Лагранжа.

А теперь сравним числа (645.4) при $n = 5$. Сосчитаем включение (643.2):

$$\omega_5 \in \frac{(3)!!^2 \cdot 5}{2^5} \left[1, 1 + \frac{1}{5} \right].$$

Как видно, $\omega_5 > 1$. Тут напротив, Лагранж хуже Тэйлора.

Вывод: формулы Тэйлора и Лагранжа для данного способа приближения имеют одинаковый порядок относительно h .

Что касается коэффициентов при h^n , то они зависят от n . Целесообразность какого-либо предпочтения заранее не определена. Тут появляется возможность использования пересечений в локализующих вариантах приближения.

646. Приложение: доказательство леммы 643.1

1⁰. Итак, $\omega_n^{\text{НОРМ}}(t) = (t-1)(t-2)\dots(t-n)$. Как полином n -й степени эта функция имеет не более $n-1$ локальный экстремум. Поэтому в каждом из $n-1$ интервалов между узлами имеется только один локальный экстремум.

Далее, на промежутках между узлами эта функция сохраняет знак. Поэтому она с точностью до знака тождественна с $|\omega_n^{\text{НОРМ}}(t)|$. Значит последняя также имеет на каждом интервале между узлами единственный локальный экстремум. Именно — максимум, ввиду неотрицательности $|\omega_n^{\text{НОРМ}}(t)|$.

Рассмотрим неравенство

$$(646.1) \quad |\omega_n^{\text{НОРМ}}(1+t)| < \omega_n^{\text{НОРМ}}(t)$$

при $t \in [1, n]$. Расшифровывая левую и правую части, обнаруживаем, что оно равносильно следующему: $|t| < |t-n|$, или, благодаря включению, $t < n-t$, т.е. $t < \frac{n}{2}$. Следовательно, $1+t < 1 + \frac{n}{2}$.

Отсюда максимумы, расположенные на промежутке $\left[1, \frac{n}{2} + 1\right]$, убывают слева направо, и минимальным является правый из них.

2⁰. Далее, функция $|\omega_n^{\text{НОРМ}}(t)|$ чётна относительно средней точки $t_{\text{ср}} = \frac{n+1}{2}$. Действительно, обозначим $\tau = t - t_{\text{ср}}$. Подставим равносильное $t = t_{\text{ср}} + \tau$ в выражение этой функции

$$|\omega_n^{\text{НОРМ}}(t)| = |t-1| \cdot |t-2| \dots |t-(n-1)| \cdot |t-n|.$$

Получим выражение для $|\omega_n^{\text{НОРМ}}(t)|$:

$$|t_{\text{ср}} + \tau - 1|_1 \cdot |t_{\text{ср}} + \tau - 2|_2 \dots |t_{\text{ср}} + \tau - (n-1)|_{n-1} \cdot |t_{\text{ср}} + \tau - n|_n.$$

Чтобы доказать нечётность правой части поменяем в ней τ на $-\tau$. Нетрудно заметить, что

$$\left| \begin{matrix} -\tau \\ 1 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \tau \\ n \end{matrix} \right|, \quad \left| \begin{matrix} -\tau \\ 2 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \tau \\ n-1 \end{matrix} \right|, \quad \dots, \quad \left| \begin{matrix} -\tau \\ n-1 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \tau \\ 2 \end{matrix} \right|, \quad \left| \begin{matrix} -\tau \\ n \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \tau \\ 1 \end{matrix} \right|.$$

Таким образом, чётность функции $|\omega_n^{\text{НОРМ}}(t)|$ относительно средней точки $t_{\text{ср}}$ установлена.

3⁰. Теперь рассмотрим оба случая чётности n .

Во-первых, пусть n чётно. Тогда имеется средний промежуток между узлами $T_{\text{ср}} = \left[t_{\text{ср}} - \frac{1}{2}, t_{\text{ср}} + \frac{1}{2} \right]$ (рис. 643.1). Именно он является тем самым промежутком, на котором расположен наименьший максимум, поскольку его правый конец равен $\frac{n}{2} + 1$. Обозначим через t_0 точку максимума.

Докажем, что $t_0 = t_{\text{ср}}$. Функция $|\omega_n^{\text{норм}}(t)|$ непрерывно дифференцируема на $T_{\text{ср}}$. Возьмём последовательность

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k+2}, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

По чётности функции относительно $t_{\text{ср}}$ имеем:

$$|\omega_n^{\text{норм}}(t_{\text{ср}} - \varepsilon_k)| = |\omega_n^{\text{норм}}(t_{\text{ср}} + \varepsilon_k)|.$$

По теореме Ролля в некоторой точке

$$\theta_k \in [t_{\text{ср}} - \varepsilon_k, t_{\text{ср}} + \varepsilon_k]$$

производная равна 0.

Теперь пусть $k \rightarrow +\infty$. Тогда $\theta_k \rightarrow t_{\text{ср}}$. По непрерывности производной, в точке $t_{\text{ср}}$ она также равна 0. Но и в точке максимума она равна 0. Так как на данном промежутке $T_{\text{ср}}$ производная не может иметь больше одного нуля, то $t_0 = t_{\text{ср}}$.

Теперь, подставив в $|\omega_n^{\text{норм}}(t)|$ точку $t_{\text{ср}} = \frac{n+1}{2}$, получаем

$$\min_k \omega_k = \left| \frac{n+1}{2} - 1 \right| \cdot \left| \frac{n+1}{2} - 2 \right| \cdots \left| \frac{n+1}{2} - (n-1) \right| \cdot \left| \frac{n+1}{2} - n \right|,$$

или

$$\min_k \omega_k = \frac{(n-1)!!^2}{2^n}.$$

Случай чётности n исчерпан.

4⁰. Пусть n нечётно: $n = 2m + 1$. Тогда имеется чётное число $n - 1$ промежутков между узлами, из них два средних, левый и правый, разделённые средней точкой $t_{\text{ср}} = \frac{n+1}{2}$. Левый из них удовлетворяет включению:

$$\left[\frac{n+1}{2} - 1, \frac{n+1}{2} \right] \subset \left[1, \frac{n}{2} + 1 \right].$$

По доказанному в первой части, локальный максимум, расположенный на этом отрезке, не больше тех, что расположены левее. Точно также по чётности функции $|\omega_n^{\text{норм}}(t)|$ при движении от точки n к средней точке максимума убывают, пока не будет достигнут правый средний промежуток.

Утверждения теоремы о расположении минимаксов доказаны. Осталось доказать неравенство.

5⁰. Выясним, в какой части левого среднего интервала лежит минимальный максимум. Для этого привлечём к нашему рассмотрению аналогичный узловый полином меньшей степени

$$\omega_{n-1}^{\text{норм}}(t) = (t-1)(t-2)\dots(t-(n-1)).$$

Понятно, что

$$\omega_n^{\text{норм}}(t) = (t-n)\omega_{n-1}^{\text{норм}}(t).$$

Продифференцируем:

$$(646.2) \quad \frac{d}{dt}\omega_n^{\text{норм}}(t) = \omega_{n-1}^{\text{норм}}(t) + (t-n)\frac{d}{dt}\omega_{n-1}^{\text{норм}}(t).$$

Теперь запишем это равенство через минимакс узлового полинома меньшей степени. По доказанному (поскольку $n-1$ чётно) он достигается в средней точке промежутка $[1, n-1]$, т.е. при $t_{\text{ср}}^{(n-1)} = \frac{n}{2}$. Так как $\frac{d}{dt}\omega_{n-1}^{\text{норм}}\left(t_{\text{ср}}^{(n-1)}\right) = 0$, то

$$(646.3) \quad \frac{d}{dt}\omega_n^{\text{норм}}\left(\frac{n}{2}\right) = \omega_{n-1}^{\text{норм}}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Выясним знак производной $|\omega_n^{\text{норм}}(t)|$ в этой точке. Во первых найдём знак правой части (646.3).

Понятно, что $\omega_{n-1}^{\text{норм}}(t) > 0$ при $t > n-1$. При движении влево точки t функция будет менять знак при переходе через каждый узел. Чтобы попасть в левый средний промежуток, точке t придётся перейти через половину всех узлов, т.е. через $\frac{n-1}{2} = m$ штук. Отсюда в средней точке знак правой части (646.3) таков: $(-1)^m$. Поэтому она равна $(-1)^m\omega_{n-1}$.

Далее, аналогично найдем знак (в той же точке) $\omega_n^{\text{норм}}\left(\frac{n}{2}\right)$. На этот раз точке t предстоит, исходя из интервала $t > n$, пройти через один узел больше. Значит, точка эта $t = \frac{n}{2}$ лежит в

том промежутке между узлами, где знак $\omega_n^{\text{норм}}(t)$ равен $(-1)^{m+1}$.
Отсюда

$$|\omega_n^{\text{норм}}(t)| = (-1)^{m+1} \omega_n^{\text{норм}}(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} |\omega_n^{\text{норм}}(t)| = (-1)^{m+1} \frac{d}{dt} \omega_n^{\text{норм}}(t).$$

В частности при $t = \frac{n}{2}$ имеем:

$$\frac{d}{dt} \left| \omega_n^{\text{норм}} \left(\frac{n}{2} \right) \right| = (-1)^{m+1} \frac{d}{dt} \omega_n^{\text{норм}} \left(\frac{n}{2} \right).$$

Согласно (646.3),

$$\frac{d}{dt} \left| \omega_n^{\text{норм}} \left(\frac{n}{2} \right) \right| = -\omega_{n-1}.$$

Поэтому точка максимума, достигаемая на $\left[\frac{n+1}{2} - 1, \frac{n+1}{2} \right]$,
лежит левее точки $t = \frac{n}{2}$. В итоге

$$t'_{\min\max} \in \left[\frac{n+1}{2} - 1, \frac{n}{2} \right].$$

6⁰. Перейдём к доказательству неравенства. С одной стороны запишем

$$(646.4) \quad \omega_n = \max_{t \in \left[\frac{n+1}{2} - 1, \frac{n}{2} \right]} |\omega_n^{\text{норм}}(t)| \geq \left| \omega_n^{\text{норм}} \left(\frac{n}{2} \right) \right|.$$

Вычислим правую часть:

$$\left| \omega_n^{\text{норм}} \left(\frac{n}{2} \right) \right| = \left| \frac{n}{2} - 1 \right| \cdot \left| \frac{n}{2} - 2 \right| \cdots \left| \frac{n}{2} - n \right| = \frac{(n-2)!!n!!}{2^n}.$$

Итак,

$$(646.5) \quad \omega_n \geq \frac{(n-2)!!n!!}{2^n}.$$

С другой стороны, из (646.3)

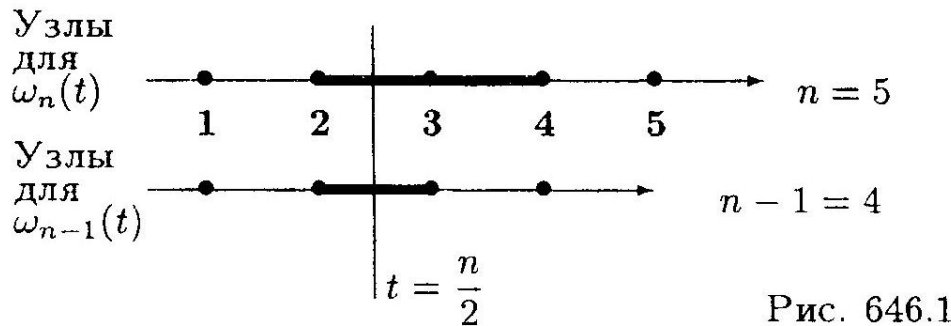
$$(646.6) \quad \max |\omega_n^{\text{норм}}(t)| = \max |t - n| \cdot \max |\omega_{n-1}^{\text{норм}}(t)|,$$

где максимумы определены также на $\left[\frac{n+1}{2} - 1, \frac{n}{2}\right]$.

Здесь максимум $|t - n|$ находим, вычисляя эту функцию на концах промежутка:

$$(646.7) \quad \max |t - n| = \max \left\{ \left| \frac{n+1}{2} - 1 - n \right|, \left| \frac{n}{2} - n \right| \right\} = \frac{n+1}{2}.$$

Займёмся максимумом от $|\omega_{n-1}^{\text{норм}}(t)|$. Отметим, что отрезок $\left[\frac{n+1}{2} - 1, \frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right]$, на котором он определён, погружён в средний промежуток полинома $\omega_{n-1}(t)$ (рис. 646.1).



Поэтому

$$(647.8) \quad \max |\omega_{n-1}^{\text{норм}}(t)| \leq \omega_{n-1} = \frac{(n-2)!!^2}{2^{n-1}}.$$

Отсюда, благодаря (646.6), (646.7) и (646.8), имеем:

$$(646.9) \quad \omega_n \leq \frac{n+1}{2} \frac{(n-2)!!^2}{2^{n-1}} = \frac{(n-2)!!^2(n+1)}{2^n}.$$

Из () и () следует двустороннее неравенство:

$$(646.10) \quad \frac{(n-2)!! n!!}{2^n} \leq \omega_n \leq \frac{(n-2)!!^2(n+1)}{2^n}.$$

Оно равносильно включению (643.2)

Замечание 646.1. При нечётном n по чётности функции $|\omega_n^{\text{норм}}(t)|$, другой минимакс достигается в точке

$$t''_{\min\max} \in \left[\frac{n}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 1 \right].$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Бахвалов Н. С.

Численные методы. Анализ, алгебра, дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1975, 632 с.

Березин И. С. и Жидков Н. П.

Методы вычислений. В 2-х томах. - М.: Физматгиз, 1959 - 60, 464+620 с.

Данилов В. Л. и др.

В.Л. Данилов, А.Н. Иванова, Е.К. Исакова, Л.А. Люстерник, Г.С. Салехов, А. Н. Хованский, Л. Я. Цлаф, А. Р. Янпольский. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. - М.: Физматгиз, 1961, 440 с.

Евграфов М. А. и др.

Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. - М.: Наука, 1969, 388 с.

Завьялов Ю. С. и др.

Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. По ред. Н.Н. Яненко. - М., Наука, 1980, 352 с.

Люк Ю.

Специальные математические функции и их аппроксимации. - Мир, 1980, 608 с.

Меньшиков Г. Г.

1. Минимаксы функций Лебега лагранжева интерполирования с равноотстоящими узлами // Журнал вычислительной математики и математической физики, том 7, 1967, 4, с. 881 — 885.

2. Интервальный анализ и методы вычислений: Конспект лекций.

2.4. Выпуск 4. Введение в аппроксимацию функций. Издание второе. - НИХИ СПбГУ. 2000, 38 с.

3. Локализирующие вычисления: Конспект лекций. Выпуски 1, 2, 3. - НИХИ СПбГУ. 2003, 89+59+61 с.

Олвер Ф.

Введение в асимптотические методы и специальные функции. - М.: Наука, 1978, 376 с.

Попов Б. А., Теслер Г. С.

Вычисление функций на ЭВМ. - Киев: Наукова Думка, 1984, 600 с.

Федорюк М. В.

Асимптотика: Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1987, 544 с.

Шолов Г. Е.

Математический анализ. Функции одной переменной. В трёх частях. Часть 3. - М.: Наука, 1970, 352 с.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ВЫПУСКОВ

Выпуск 1 ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕРВАЛЬНО-ЛОКАЛИЗУЮЩУЮ ОРГАНИЗАЦИЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВЫПУСКУ 1

ПРОЛОГ

ВВОДНАЯ ГЛАВА: МЕТРОЛОГИЯ ТРАДИЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ 00. Обстоятельства проведения расчётов на компьютере

§ 01. Погрешности в вычислительных процессах

§ 02. Оценки погрешностей

§ 03. Проблема обеспечения требуемой точности

§ 04. Примеры негодной организации вычислений

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕРВАЛЬНО-ЛОКАЛИЗУЮЩУЮ ОРГАНИЗАЦИЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ 10. Суть интервально-локализирующего подхода

§ 11. Постулируемые свойства машинной арифметики

§ 12. Локализирующие множества и некоторые действия над ними

§ 13. Интервальные функции

§ 14. Интервальные продолжения. Естественная интервальная арифметика

§ 15. Интервальные расширения. Основные теоремы о композициях

§ 16. Стандартные интервальные процедуры типа "приближённое расширение + мажоризация"

§ 17. Машинно-программный инструментарий курса

§ 18. Пример базовой интервальной программной системы для профессионального компьютера

§ 19. Экспериментальное выяснение арифметических характеристик вычислительной системы

Выпуск 2 ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕРВАЛЬНО-ЛОКАЛИЗУЮЩУЮ ОРГАНИЗАЦИЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВЫПУСКУ 2

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ

§ 20. Построение таблицы функции

§ 21. Примеры локализирующей реализации негодных алгоритмов

§ 22. Функции размытого аргумента

§ 23. Оценки числовых множеств значений и глобальная экстремизация функций

§ 24. О двусторонней реализации прямых методов линейной алгебры

§ 25. Интервальные подпрограммы вычисления тригонометрических функций

ГЛАВА 3. ПРОБЛЕМА ГРУБОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО РАСЧЁТА

§ 30. Введение

§ 31. Проблема минимальности композиционных интервальных расширений

§ 32. Понятия и свойства, применяемые в теоретическом анализе точности интервальных вычислений

§ 33. Продолжение: интервальное условие Липшица

§ 34. Примеры теоретического анализа точности интервального расчёта

§ 35. Проблема уточнения композиционного интервального расширения

Выпуск 3

ИНТЕРВАЛИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЁННЫХ ФОРМУЛ. ЧИСЛЕННОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВЫПУСКУ 3

ГЛАВА 4. ИНТЕРВАЛИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЁННЫХ ФОРМУЛ

§ 40. Интервализация функций, заданных приближённым выражением с информацией об остаточном члене

§ 41. Формула Тэйлора

§ 42. Продолжение: MV-форма интервального расширения функции одного аргумента

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

§ 50. Введение. Получение оценок остатка

§ 51. Двухходовая алгоритмика суммирования числового ряда

§ 52. Новое пополнение базовой интервальной программной системы

§ 53. Пример реализации алгоритмики

§ 54. Уточнение численного суммирования рядов

§ 55. Формула Эйлера "Сумма — интеграл" и её применение к рядам

§ 56. Дополнения

БИБЛИОГРАФИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ВЫПУСКОВ

СОДЕРЖАНИЕ ВЫПУСКА 3

СОДЕРЖАНИЕ ВЫПУСКА 4

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВЫПУСКУ 4	2
ГЛАВА 6. ВВЕДЕНИЕ В АППРОКСИМАЦИЮ ФУНКЦИЙ	3
§ 60. Предмет, типы и методы аппроксимации	3
§ 61. Асимптотика как источник приближений	7
610. Асимптотические эквиваленты и асимптоты (7). 611. Свойства точности асимптотических представлений (8). 612. Практика получения остаточного члена асимптотического представления (9). 613. Уточнение асимптотических приближений (10). 614. Относительное приближение функции с нулём (11). 615. Относительное приближение функции с полюсом (13). 616. О точности асимптотических представлений на промежутке (14). 617. Формула Тэйлора как асимптотическое представление функций (14).	
§ 62. Интерполирование	15
620. Суть метода (15). 621. Интерполирование линейными комбинациями параметров (16). 622. Недостаточность линейной независимости системы базисных функций (16). 623. Зависимость интерполирующей функции от узловых значений (17). 624. Об интерполировании по Эрмиту (18).	
§ 63. Интерполирование степенными полиномами	18
630. Базовые функции. Возможность интерполирования (18). 631. Форма Лагранжа интерполирующего полинома (19). 632. Остаточный член (19). 633. Интервализация интерполяционной формулы (21). 634. Влияние размазанности узловых значений интерполируемой функции (22). 635. Частный случай: линейное интерполирование (25).	
§ 64. Интерполирование степенными полиномами с равноотстоящими узлами	26
640. Нормализация переменной и узлов (26). 641. Нормализованный полином Лагранжа (27). 642. Нормализованный интерполяционный локализатор (28). 643. О пригодности для интерполирования разных участков между узлами (28). 644. Вариант кусочно-полиномиального интерполирования (29). 645. Сравнение точностных характеристик формулы Тэйлора и интерполирования по Лагранжу (31). 646. Приложение: доказательство леммы 643.1 (34).	

БИБЛИОГРАФИЯ	39
КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ВЫПУСКОВ	40
СОДЕРЖАНИЕ ВЫПУСКА 4	42

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 18.03.2003 г. Формат бумаги 60X84 1/16. Бумага офсетная.

Печать ризографическая. Объем 2,63 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ 2877.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.

198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.