К проблеме планирования эксперимента при построении эмпирических зависимостей с интервальной ошибкой

Жилин С.И., Крючков А.В., Оскорбин Н.М.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

2011

Содержание доклада

1. Планирование эксперимента
    1. Общая постановка задачи
    2. Идея замены общих критериев на частные
2. Схема решения задачи
    1. Постановка задачи прогноза, выбор критерия
    2. Алгоритм решения задачи
3. Численные результаты
    1. Исследованные модели и параметры
    2. Полученные результаты

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Построение и анализ эмпирических зависимостей

$$y = F(x, \beta) + \varepsilon_y, \qquad x \in X, \qquad (1)$$

- x – входной вектор;
- β – вектор параметров;
- $X \in \mathbb{R}^n$ – множество значений x;
- y – выходная переменная;
- F – скалярная функция, описывающая детерминированную составляющую y;

Построение и анализ эмпирических зависимостей

$$y = F(x, \beta) + \varepsilon_y, \qquad x \in X, \qquad (1)$$

- ε_y - величина, описывающая непредсказуемую составляющую объекта (например, ошибку наблюдения).

Нестатистический подход:

$$\varepsilon_y \leq |\varepsilon|.$$

Возможные задачи

$$y = F(x, \beta) + \varepsilon_y, \qquad x \in X, \qquad (1)$$

- Оценивания параметров β;
- Прогноза значения функции y в точке x_0;
- …

Что такое планирование эксперимента

Под **планированием эксперимента** понимают поиск таких точек x пространства, постановка эксперимента (замер значения y) в которых *априори* приведет к удовлетворению определенного критерия (критериев).

Критерии оптимальности

Критерии (в обозначениях Н.П. Дывака):

- I_D-оптимальности – минимизация объема множества допустимых значений параметров зависимости;
- I_E-оптимальности – минимизация максимального диаметра множества допустимых значений параметров зависимости;

Критерии оптимальности

Критерии (в обозначениях Н.П. Дывака):

- I_G-оптимальности – минимизация максимальной ширины интервального прогноза;
- …

Критерии оптимальности

Указанные критерии – интегральные по некоторым областям.

При решении задач планирования эксперимента эти *общие* критерии могут быть заменены на некоторый *частный* критерий, после чего необходимо подобрать наиболее подходящий под условия алгоритм решения задачи.

ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Постановка задачи прогноза

$$y = F(x, \beta) + \varepsilon_y, \qquad x \in X, \qquad (1)$$

- $\varepsilon_y \leq |\varepsilon|$,
- $\underline{\beta_i} \leq \beta_i \leq \overline{\beta_i}$ для всех β_i,
- x_0 – точка прогноза,
- $X^* \in X$ – пространство планирования.

Постановка задачи прогноза

Требуется найти оптимальный план эксперимента, то есть такую последовательность точек пространства планирования X^*, постановка эксперимента в которых априори минимизировала бы ширину Δ интервала прогноза значения функции y в точке прогноза x_0.

Оценка интервала прогноза в начальном приближении

По указанным данным можно оценить интервал прогноза $\left[\underline{y^{(0)}}(x_0), \overline{y^{(0)}}(x_0)\right]$, решив две задачи оптимизации:

$$\underline{y^{(0)}}(x_0) = \min_{\beta} y(x_0),$$

$$\overline{y^{(0)}}(x_0) = \max_{\beta} y(x_0),$$

$$\Delta^{(0)} = \overline{y^{(0)}}(x_0) - \underline{y^{(0)}}(x_0).$$

Схема решения задачи

Шаг 1. Строим сетку на множестве $X^* \in \mathbb{R}^n$.
Например, для n-мерного бруса:

For $k = 1$ to N Do

$$x_i^{(k)} = x_{i\,min} + (k-1)\frac{x_{i\,max} - x_{i\,min}}{N-1}$$

End Do,

где $x_{i\,min}$ и $x_{i\,max}$ - минимальное и максимальное значение i-й координаты бруса.

Схема решения задачи

<u>Шаг 2.</u> В каждой точке сетки $x^{(i)}$ определяем интервал $\left[\underline{y}(x^{(i)}), \overline{y}(x^{(i)})\right]$ значений функции y в данной точке:

$$\underline{y}\left(x^{(i)}\right) = \min_{\beta} y\left(x^{(i)}\right);$$
$$\overline{y}\left(x^{(i)}\right) = \max_{\beta} y\left(x^{(i)}\right).$$

Схема решения задачи

Шаг 3. На каждом полученном интервале $\left[\underline{y}(x^{(i)}), \overline{y}(x^{(i)})\right]$ строим еще одну сетку:

For $k = 1$ to M Do

$$y^{(k)} = \underline{y}(x^{(i)}) + (k-1)\frac{\overline{y}(x^{(i)}) - \underline{y}(x^{(i)})}{M-1}$$

End Do,

где $y^{(k)} - y^{(k-1)} \leq 2\varepsilon$ при любом $k = \overline{1, M}$.

Схема решения задачи

<u>Шаг 4.</u> Для каждой точки полученной сетки предполагаем, что

$$y\left(x^{(i)}\right) \in \left[y^{(j)}\left(x^{(i)}\right) - \varepsilon, y^{(j)}\left(x^{(i)}\right) + \varepsilon\right]. \qquad (2)$$

Находим интервал прогноза, включая (2) в ограничения задач оптимизации:

$$\underline{y^{(i,j)}}(x_0) = \min_{\substack{\beta \\ (2)}} y(x_0)\,, \overline{y^{(i,j)}}(x_0) = \max_{\substack{\beta \\ (2)}} y(x_0),$$

$$\Delta^{(i,j)} = \overline{y^{(i,j)}}(x_0) - \underline{y^{(i,j)}}(x_0).$$

Схема решения задачи

Шаг 5. Для каждой точки $x^{(i)}$ находим *наихудший* случай, то есть такую точку $y^{(j^*)}$, для которой на предыдущем шаге интервал прогноза был наибольшим:

$$\Delta^{(i,j^*)} = \max_j \Delta^{(i,j)} .$$

Схема решения задачи

<u>Шаг 6.</u> Среди всех полученных $\Delta^{(i,j^*)}$ выбираем *наилучший* случай, то есть

$$\Delta^{(i^*,j^*)} = \min_i \Delta^{(i,j^*)} .$$

После этого происходит возврат к 2-му шагу, но теперь в каждую задачу оптимизации добавляется ограничение

$$y\left(x^{(i^*)}\right) \in [y^{(j^*)}\left(x^{(i^*)}\right) - \varepsilon, y^{(j^*)}\left(x^{(i^*)}\right) + \varepsilon].$$

Схема решения задачи

При этом полученная точка $x^{(i^*)}$ включается в план эксперимента.

Алгоритм продолжает работу до тех пор, пока достигается уменьшение ширины интервала прогноза Δ (таким образом можно получить *насыщенный* план эксперимента).

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследованные зависимости и параметры алгоритма

$$f(x,\beta) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + \qquad (3)$$
$$+\beta_{12} x_1 x_2 + \ldots + \beta_{n-1,n} x_{n-1} x_n + \ldots + \beta_{1,\ldots,n} x_1 \ldots x$$

- $X = \mathbb{R}^n$,
- $\left[\underline{\beta_i}, \overline{\beta_i}\right] = [0.5,1.5]\ \forall i = \overline{1,n}$,
- $X^* = \underbrace{[-1,1] \times [-1,1] \times \ldots \times [-1,1]}_{n}$,

Исследованные зависимости и параметры алгоритма

$$f(x,\beta) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + \qquad (3)$$
$$+\beta_{12} x_1 x_2 + \ldots + \beta_{n-1,n} x_{n-1} x_n + \ldots + \beta_{1,\ldots,n} x_1 \ldots x$$

- $x_{0,i} = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n},$
- $\varepsilon = 0.2,$
- $N = 5$ – количество узлов сетки на x,
- $M = 5$ – количество узлов сетки на y.

Результаты при $n = 1$

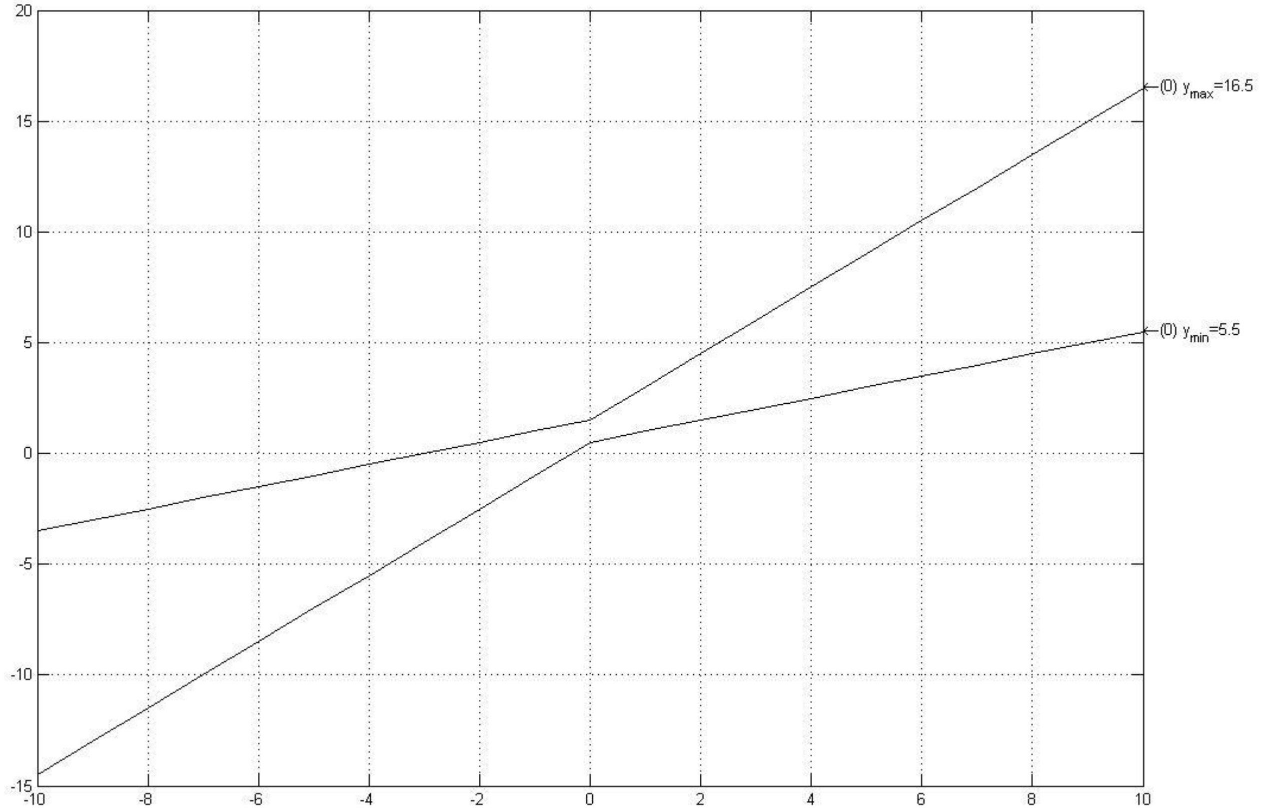
При $n = 1$ формула (3) принимает вид

$$f(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x. \qquad (4)$$

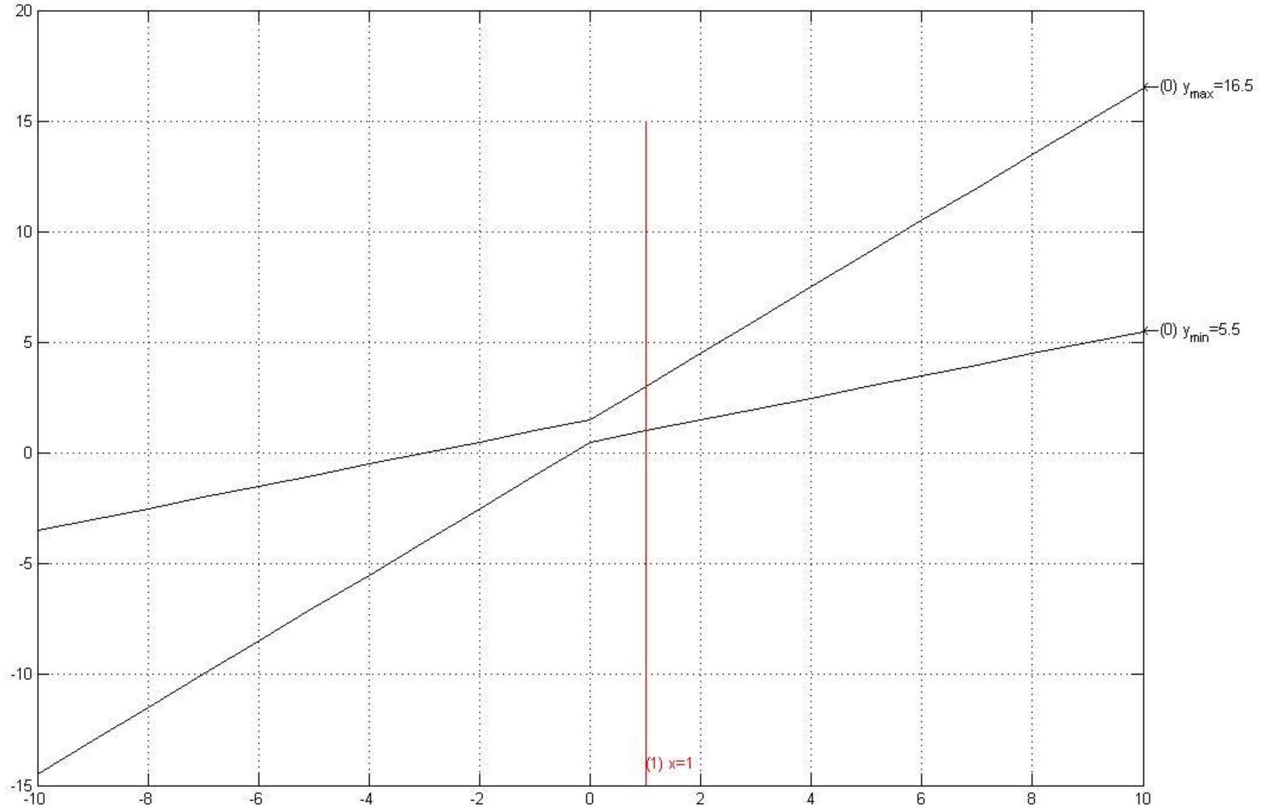
Оптимальный план эксперимента составляют точки:

№ итерации	Точка
1	$x = 1$
2	$x = -1$

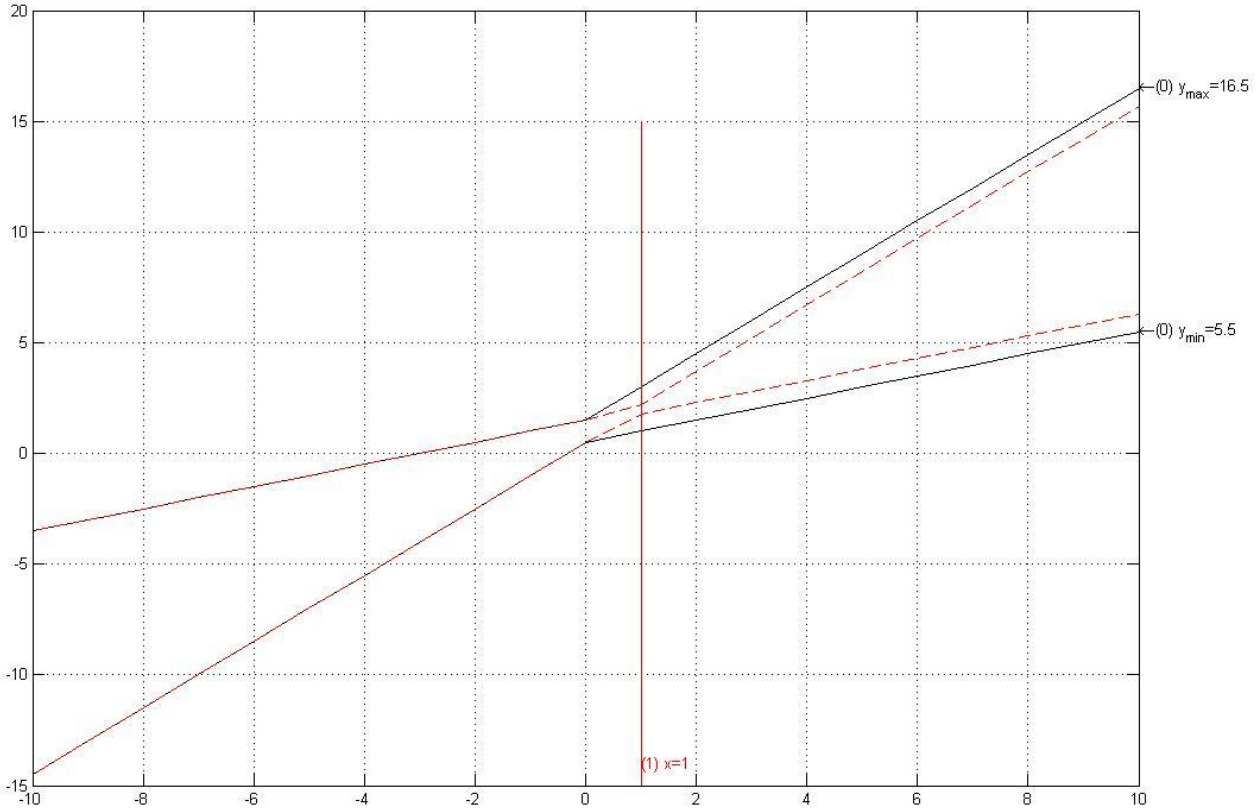
Результаты при $n = 1$



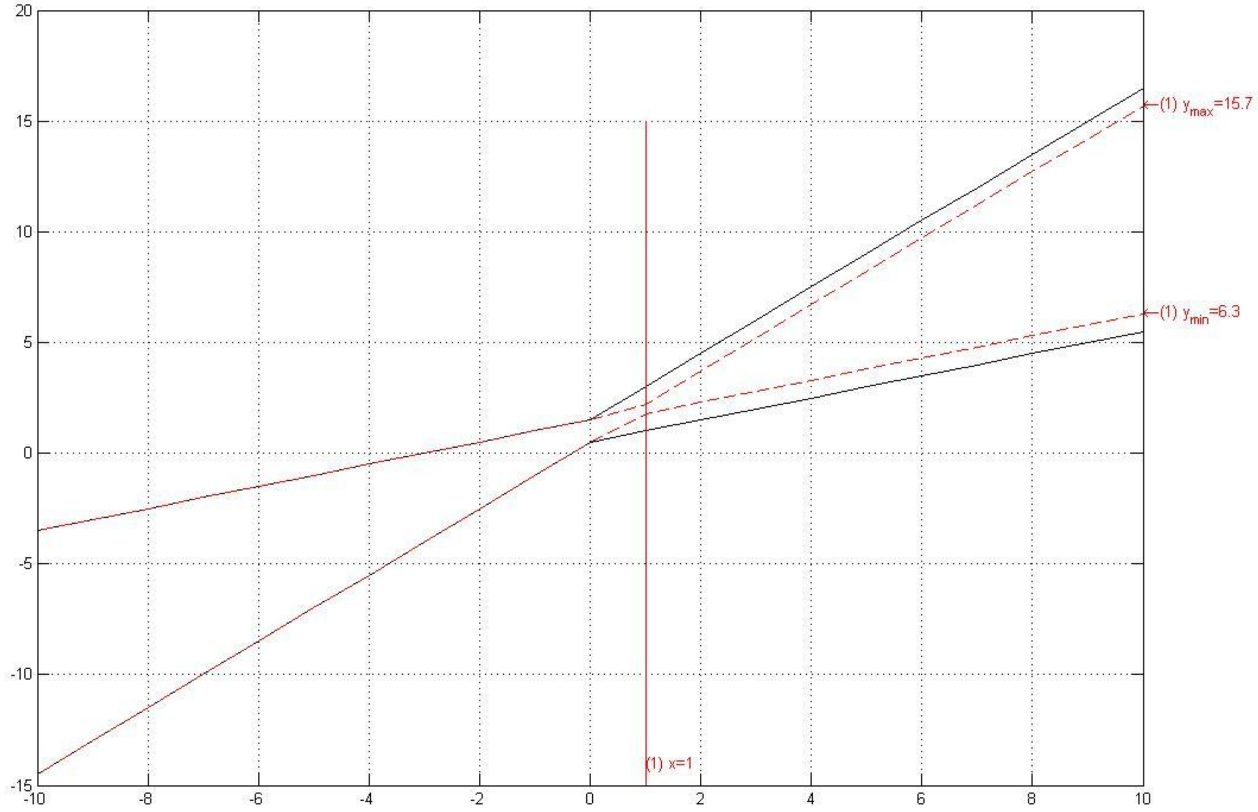
Результаты при $n = 1$



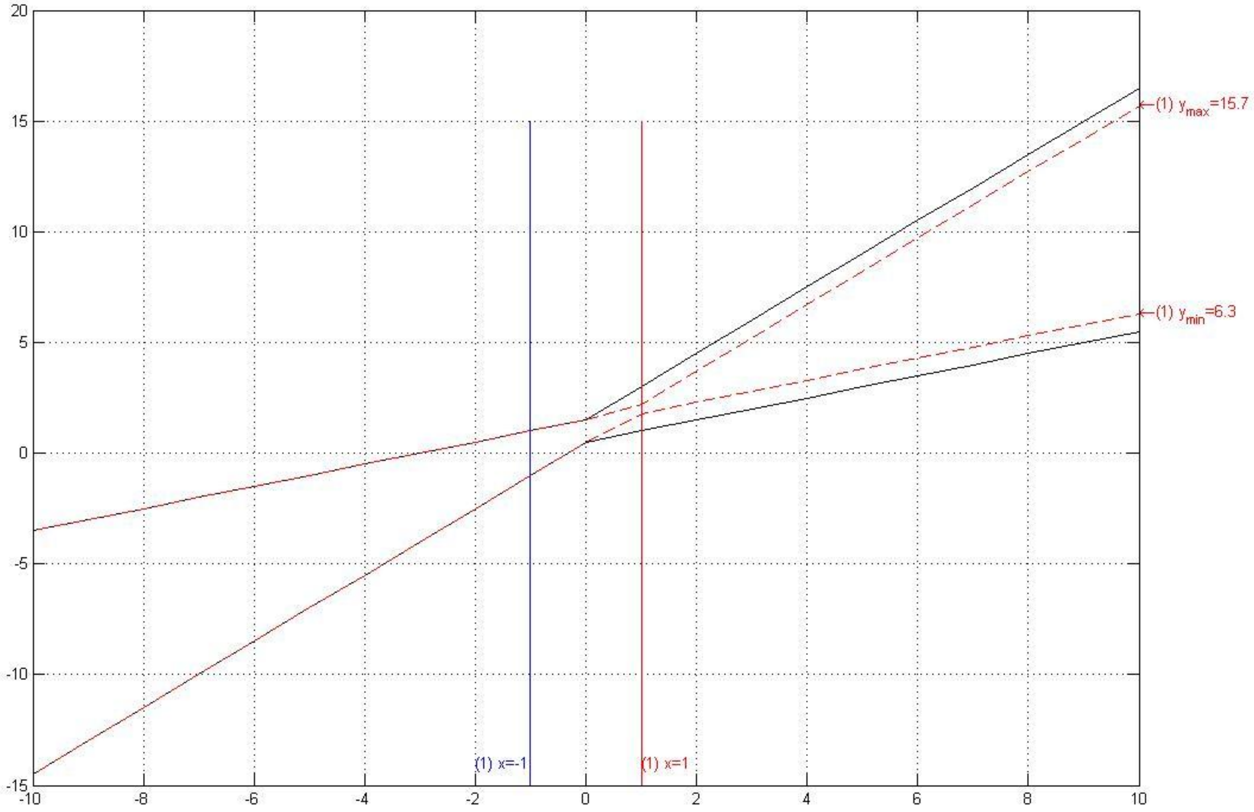
Результаты при $n = 1$



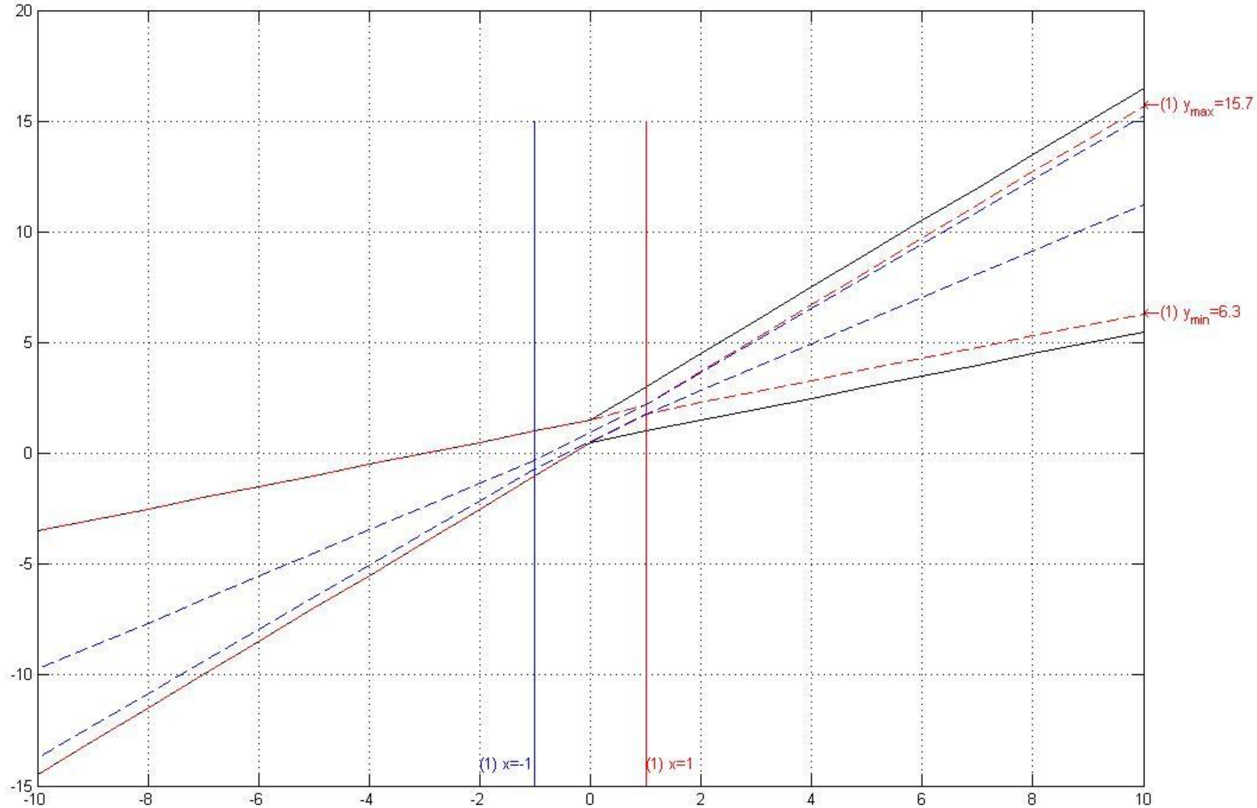
Результаты при $n = 1$



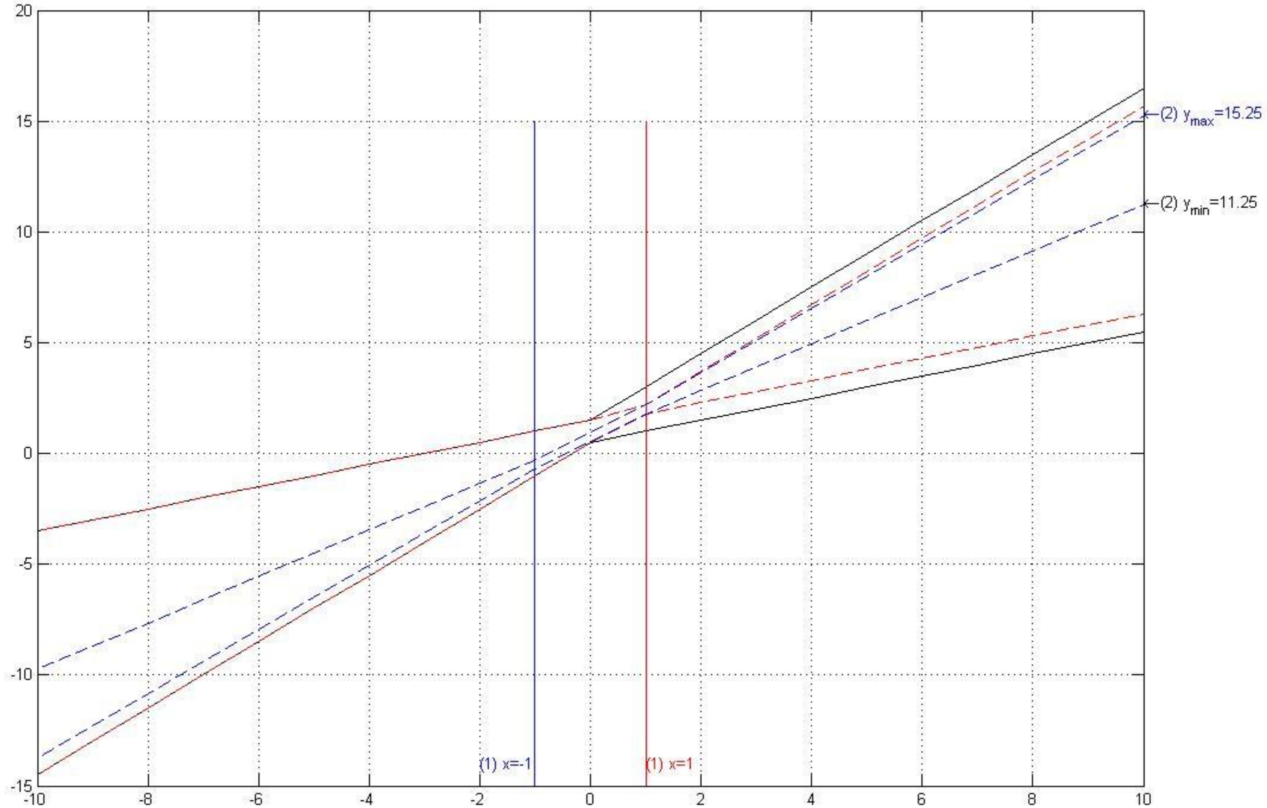
Результаты при $n = 1$



Результаты при $n = 1$



Результаты при $n = 1$



Результаты при $n = 2$

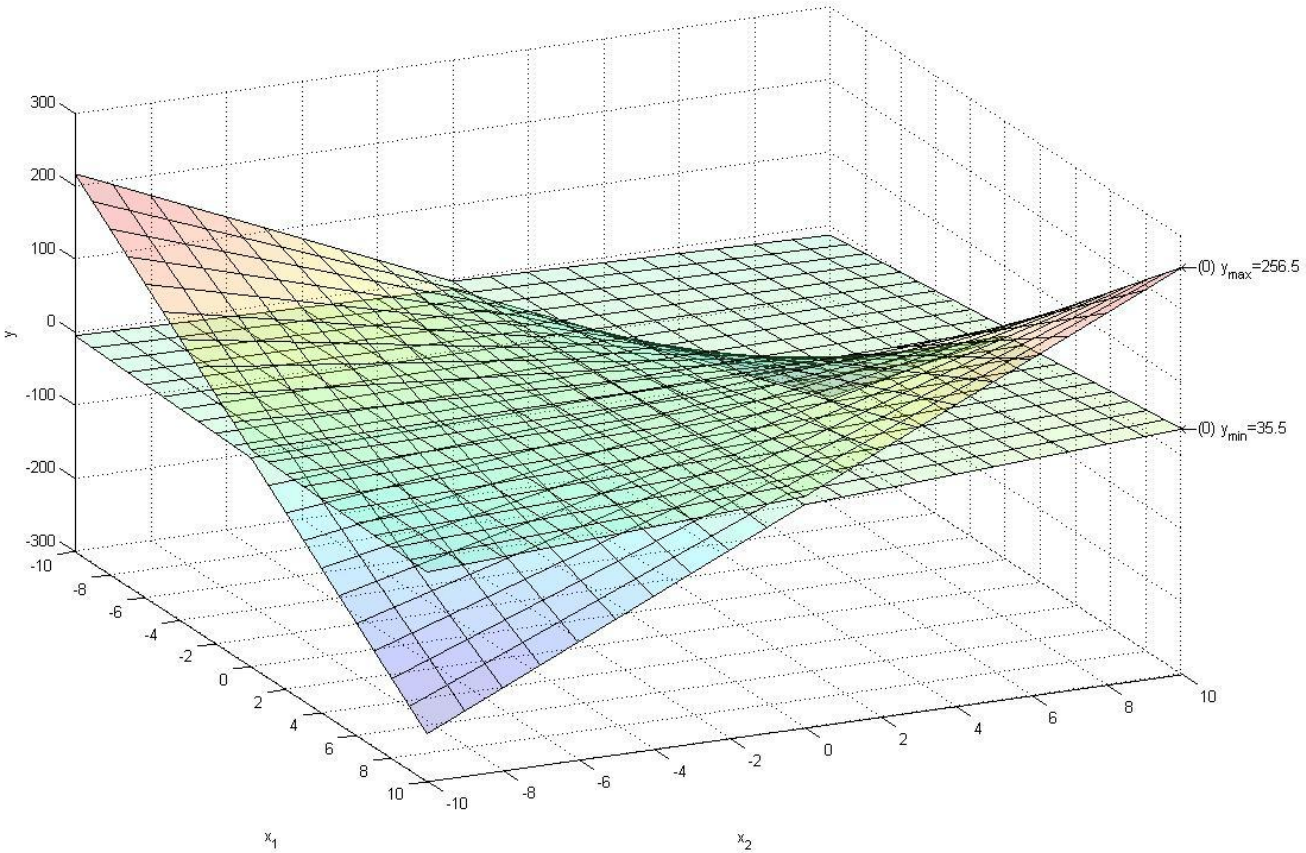
При $n = 2$ формула (3) принимает вид

$$f(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2. \quad (5)$$

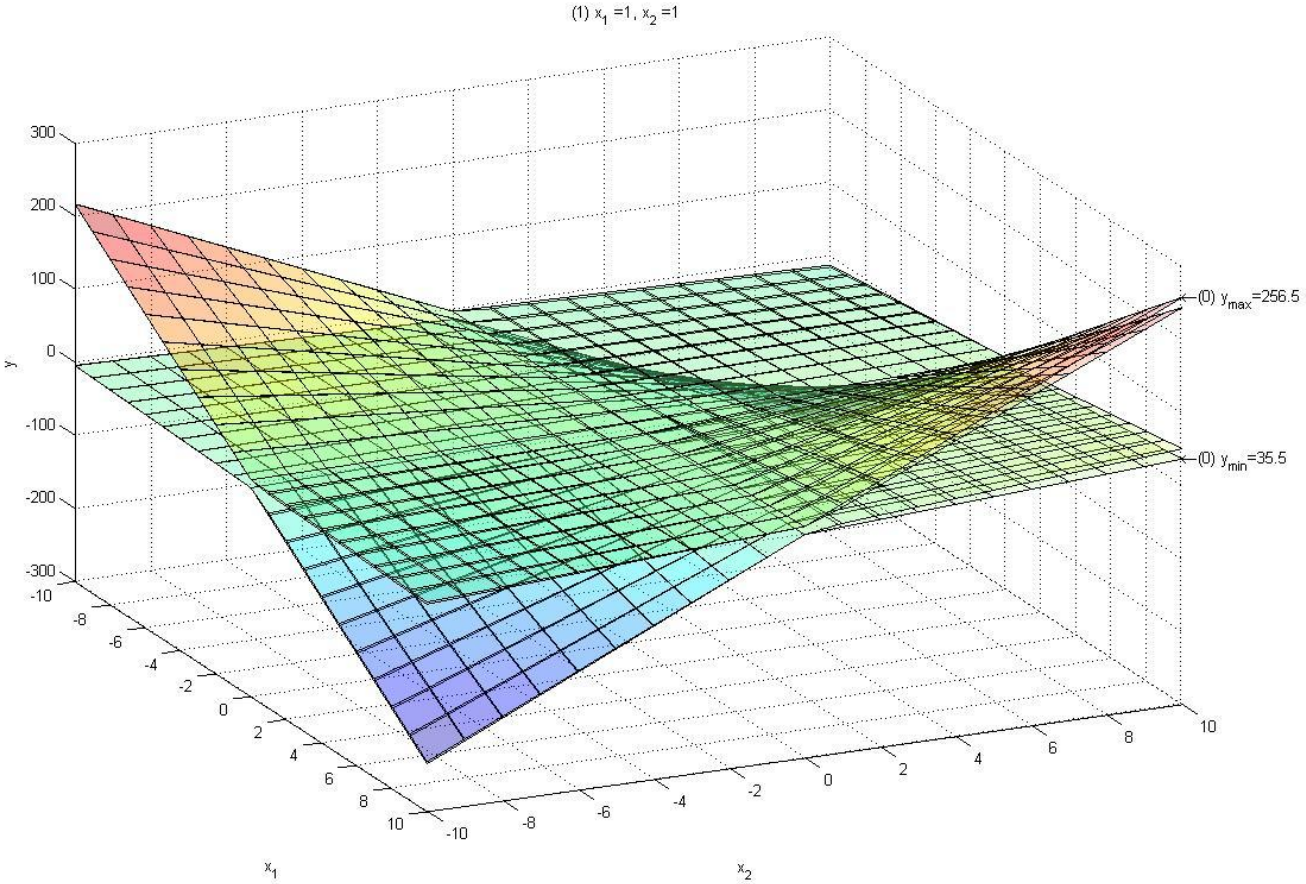
Оптимальный план эксперимента составляют точки:

№ итерации	Точка	
1	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$
2	$x_1 = -1$	$x_2 = 1$
3	$x_1 = 1$	$x_2 = -1$
4	$x_1 = -1$	$x_2 = -1$

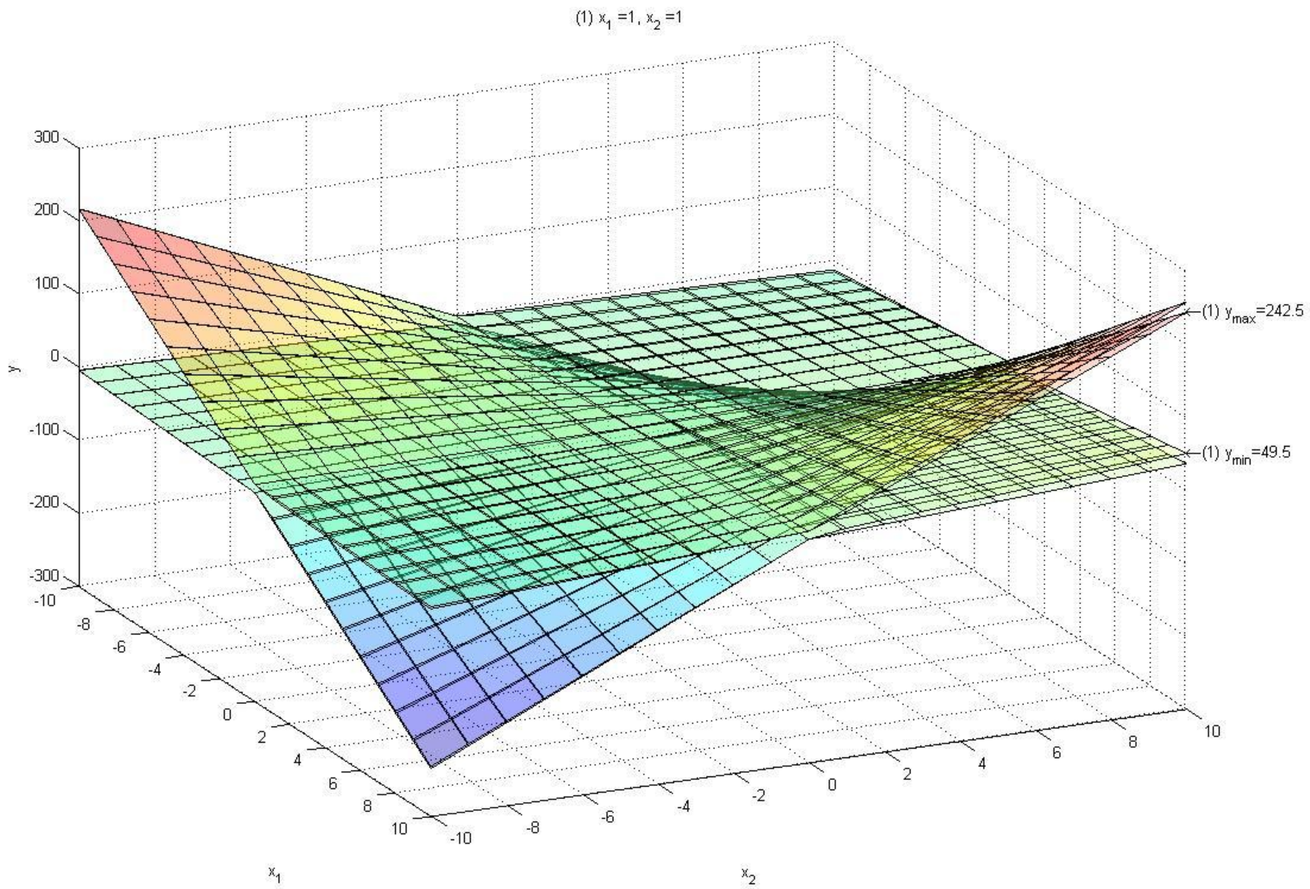
Результаты при $n = 2$



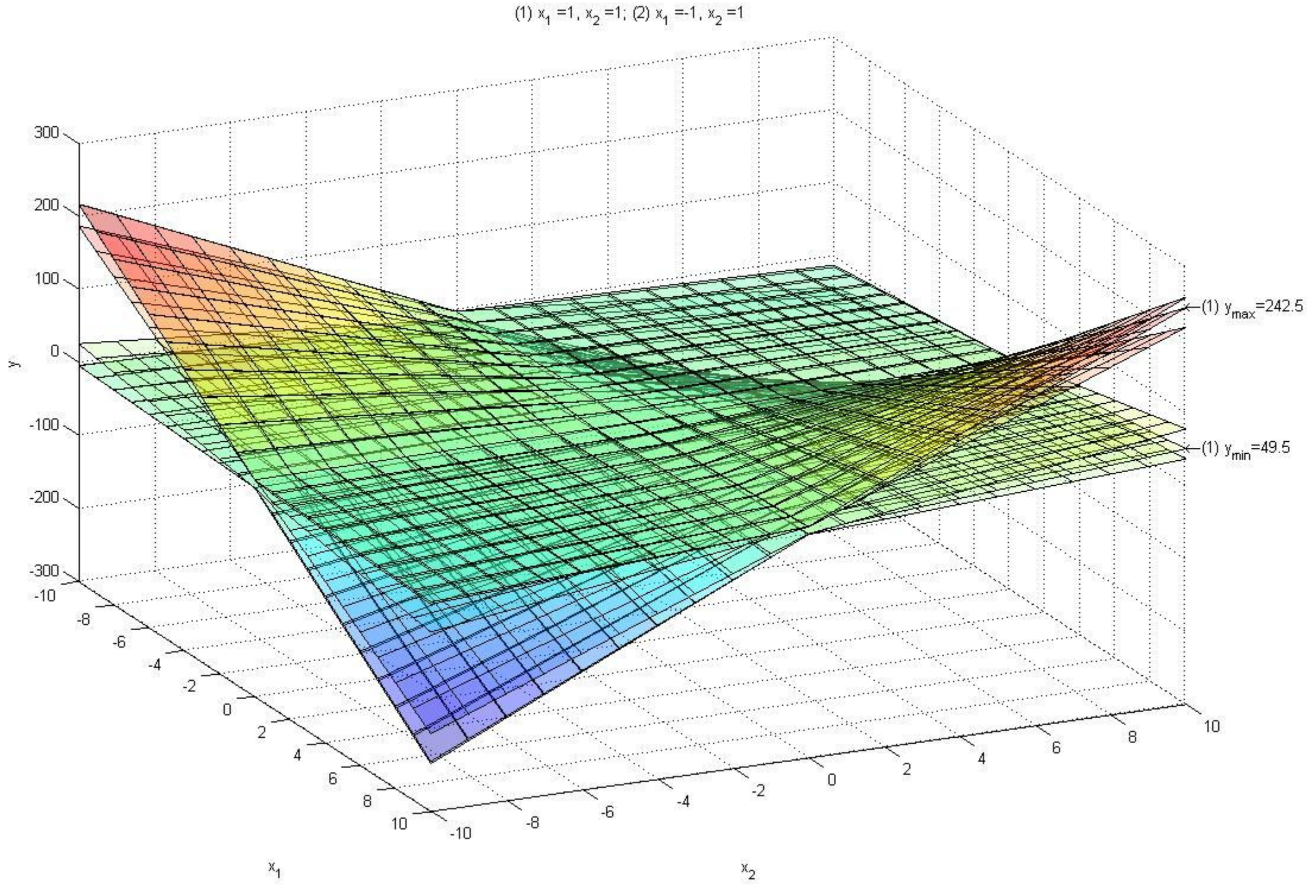
Результаты при $n = 2$



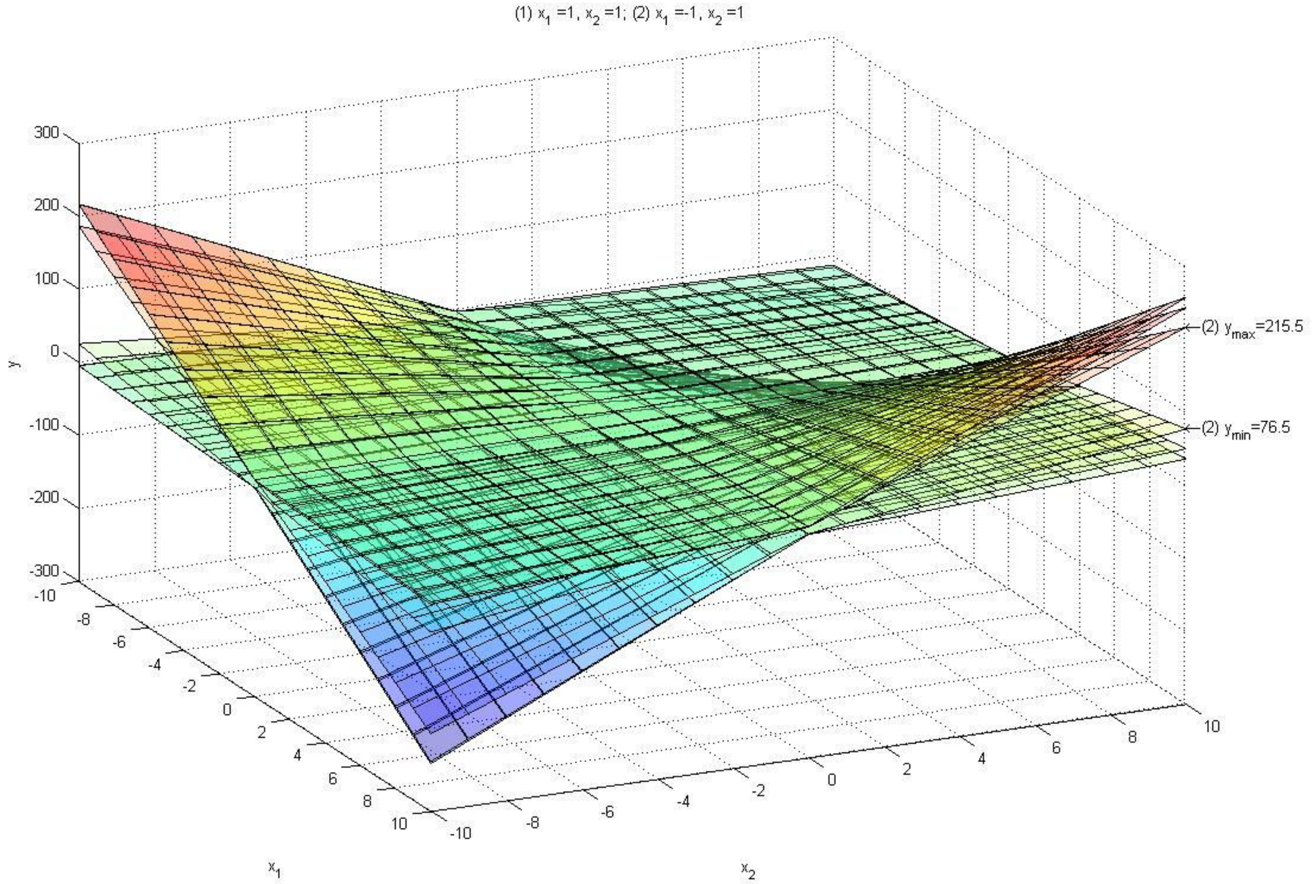
Результаты при $n = 2$



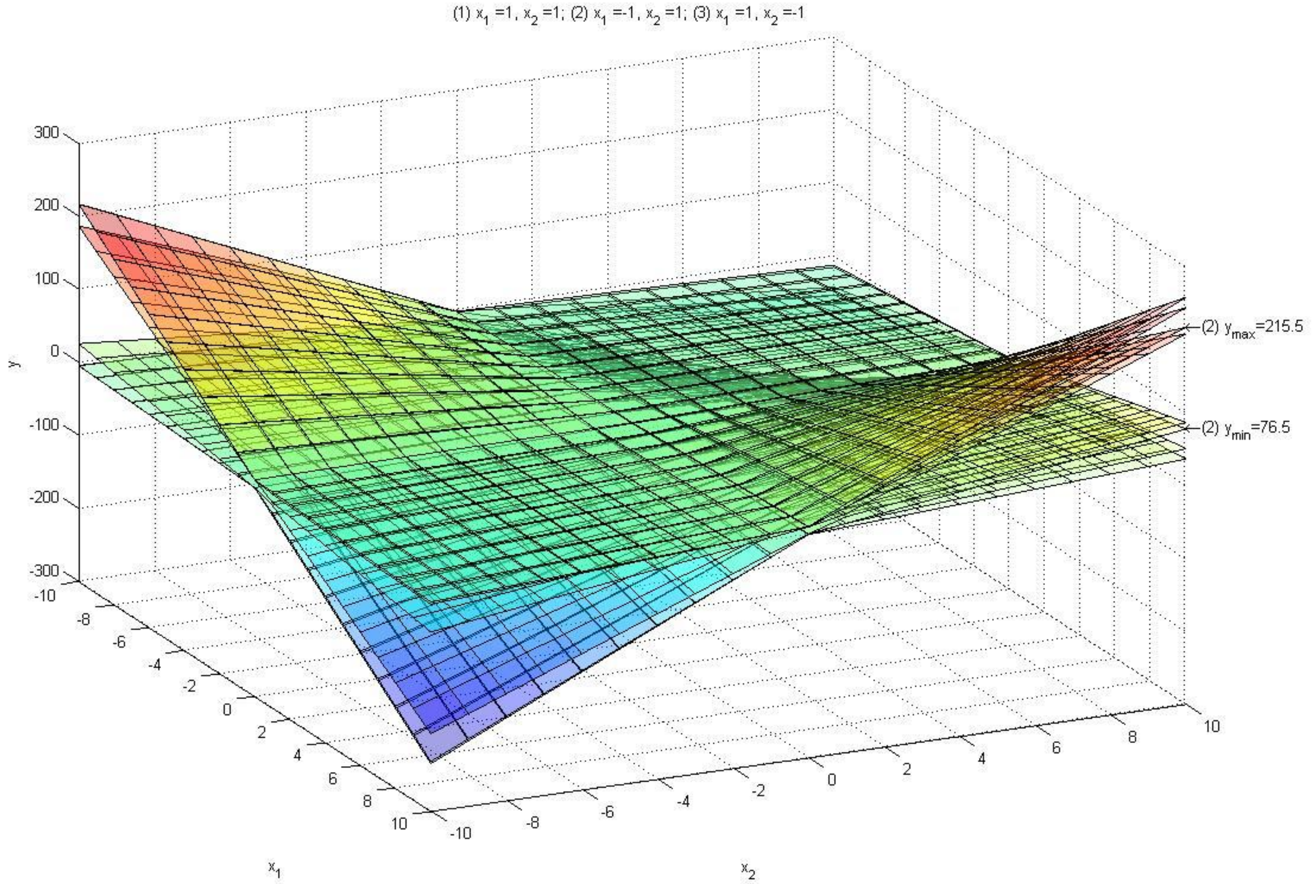
Результаты при $n = 2$



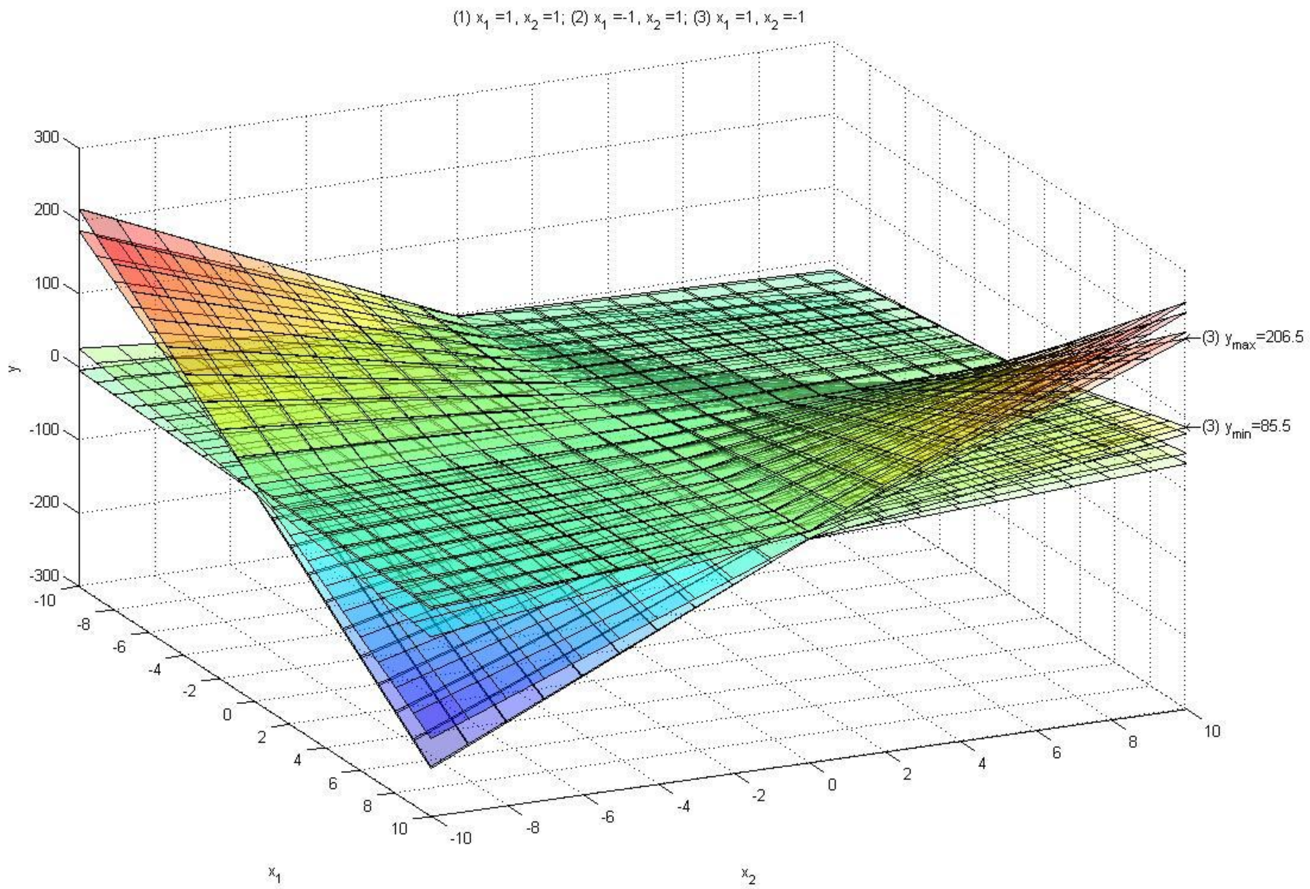
Результаты при $n = 2$



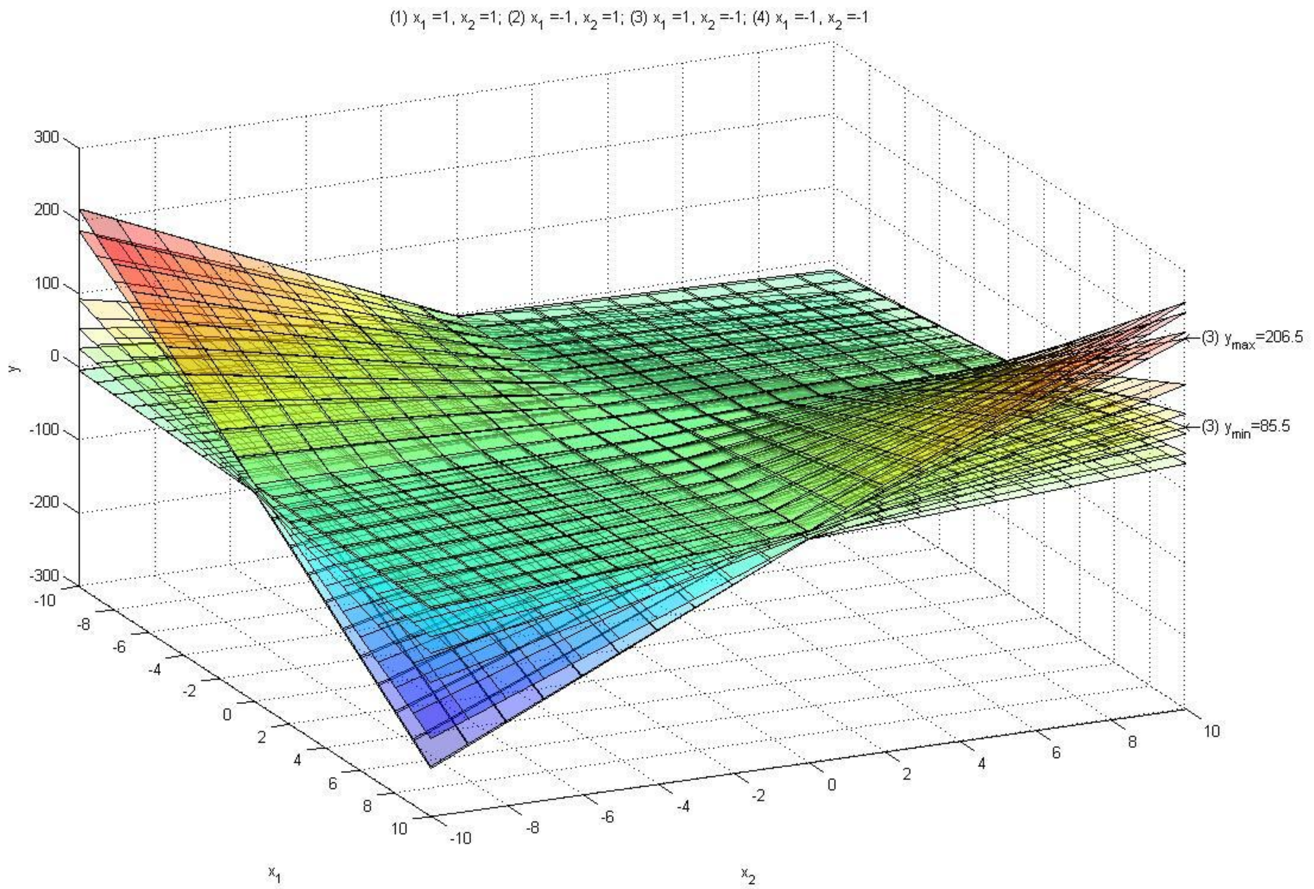
Результаты при $n = 2$



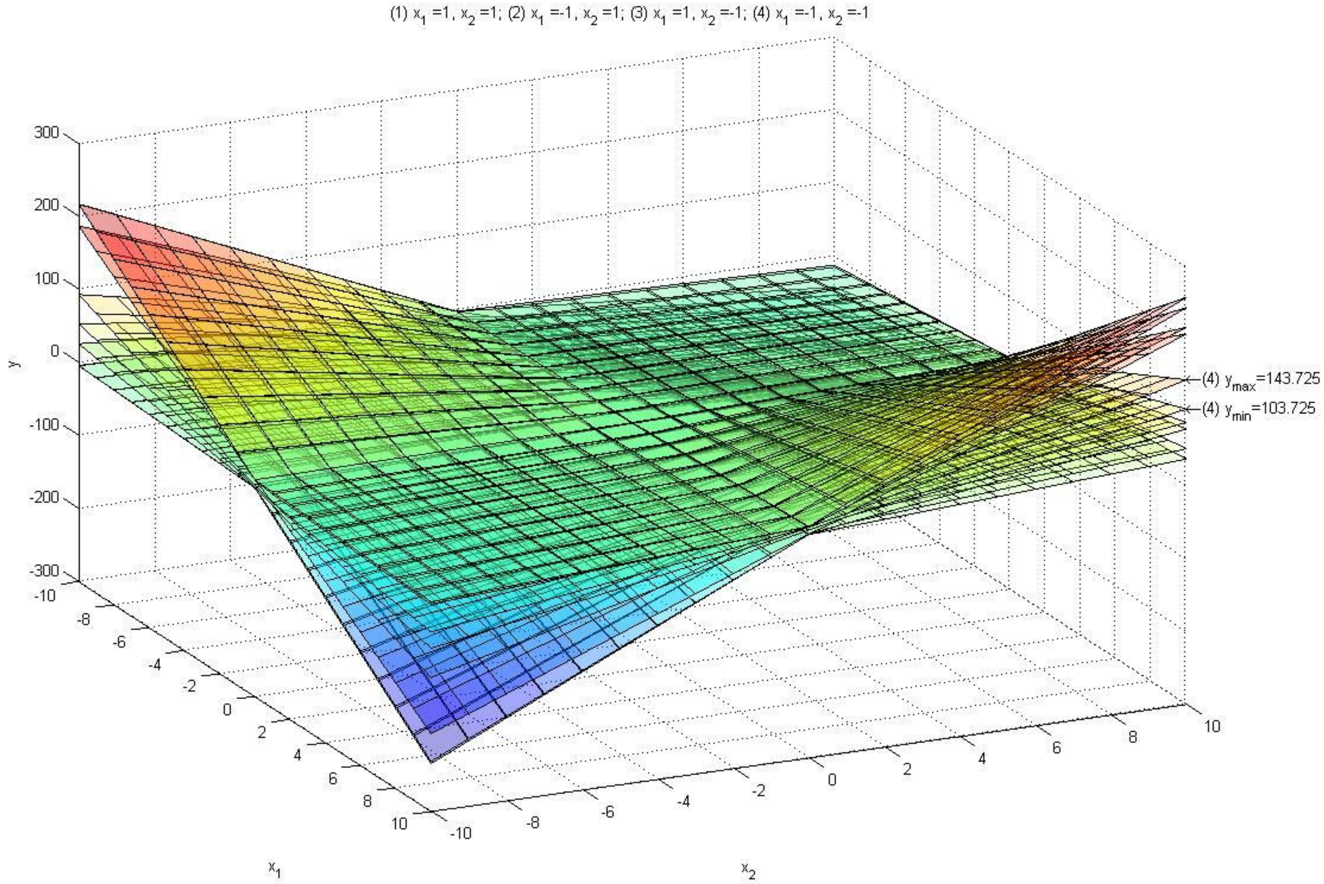
Результаты при $n = 2$



Результаты при $n = 2$



Результаты при $n = 2$



Резюме

На проверенных моделях результаты совпадают с известными из литературы.

Вопрос:

- При каких постановках задач замена общих критериев на частные даст реальную выгоду?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!