ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ
МКВМ-2004 РАБОЧИЕ СОВЕЩАНИЯ С. 267–270

Критерий неограниченности допустимого множества решений

И.А. Шарая*

Аннотация. Получен критерий неограниченности для допустимого множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений.

Договоримся использовать обозначения, предложенные в [1], и классическую интервальную арифметику (см., напр., [2]).

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ – интервальная матрица размерности $m \times n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ – интервальный вектор длины m, $x \in \mathbb{R}^n$ – вещественный вектор длины n) *допустимым множеством решений* или просто *допустимым множеством* будем называть, в соответствии с [3], множество

$$\Xi = \big\{ x \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b) \big\}. \tag{1}$$

Определение (1) можно переписать в виде $\Xi = \big\{ x \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})\ (Ax \subseteq \boldsymbol{b}) \big\}$ или, пользуясь свойством $\{Ax \mid A \in \boldsymbol{A}\} = \boldsymbol{A}x$, в виде удобного для проверки и исследования *критерия принадлежности* вектора x *допустимому множеству решений*:

$$x \in \Xi \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Легко доказать [4, 5], что Ξ – выпуклое многогранное множество (т. е. пересечение конечного числа полупространств) в $\mathbb{R}^n$. Мы покажем, как по виду матрицы $\boldsymbol{A}$ можно судить об ограниченности допустимого множества решений.

Докажем сначала два вспомогательных утверждения. Первое позволяет по специальному виду матрицы сказать, что допустимое множество неограничено, а второе, наоборот, показывает, что для неограниченного допустимого множества матрица имеет этот специальный вид.

Напомним, что конечное множество $\{a_j\}$ вещественных векторов называется *линейно зависимым*, если существует множество $\{c_j\}$ вещественных чисел, не все из которых равны нулю, такое, что $\sum_j a_j c_j = 0$. Заметим, что множество из одного вектора линейно зависимо тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Утверждение 1. *Пусть допустимое множество Ξ непусто. Если в матрице $\boldsymbol{A}$ есть линейно зависимые вещественные столбцы, то Ξ неограничено.*

Доказательство. В силу критерия (2) принадлежности допустимому множеству непустота Ξ означает, что существует $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\boldsymbol{A}\tilde{x} \subseteq \boldsymbol{b}$. Расписав произведение $\boldsymbol{A}\tilde{x}$ по столбцам $\boldsymbol{A}_{:j}$, получим

*Институт вычислительных технологий СО РАН.

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

Пусть J – множество номеров линейно зависимых вещественных столбцов $A_{:j}$ матрицы $\boldsymbol{A}$. Тогда (3) можно переписать в виде

$$\sum_{j \in J} A_{:j} \tilde{x}_j + \sum_{j=1,\, j \notin J}^{n} \boldsymbol{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \boldsymbol{b}, \tag{4}$$

а линейную зависимость вещественных столбцов выразить формулой

$$\sum_{j \in J} A_{:j} c_j = 0, \tag{5}$$

где $c_j \in \mathbb{R}$ и $\sum_{j \in J} |c_j| > 0$.

Домножая (5) на произвольное вещественное t, добавляя к (4) и пользуясь законом дистрибутивности для вещественных чисел, получим

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sum_{j \in J} A_{:j} (\tilde{x}_j + t c_j) + \sum_{j=1,\, j \notin J}^{n} \boldsymbol{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \boldsymbol{b}. \tag{6}$$

Введем вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)$, дополнив множество коэффициентов линейной зависимости нулевыми для $j \notin J$. Тогда (6) можно переписать в виде

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{:j} (\tilde{x}_j + t c_j) \subseteq \boldsymbol{b},$$

что в матричной форме выглядит так:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{A}(\tilde{x} + tc) \;\subseteq\; \boldsymbol{b}.$$

По критерию принадлежности (2) это означает, что вместе с решением $\tilde{x}$ в множество Ξ попадает прямая, проходящая через $\tilde{x}$ и параллельная ненулевому вектору c. Значит, Ξ неограничено. □

Утверждение 2. *Пусть допустимое множество Ξ непусто. Если оно неограничено, то в матрице $\boldsymbol{A}$ есть линейно зависимые вещественные столбцы.*

Доказательство. Как упоминалось во введении, Ξ – это выпуклое многогранное множество. Если Ξ неограничено, значит, неограничено его пересечение с каким-нибудь ортантом. Тогда в этом ортанте лежит выпуклое многогранное неограниченное подмножество Ξ, из которого можно выбрать какой-нибудь луч $(\tilde{x} + tc)$, где $\tilde{x}$ – начало луча, c – ненулевой вектор направления, $t \in \mathbb{R}^+$ – параметр, задающий точки луча.

Так как луч $(\tilde{x}+tc)$ целиком лежит в Ξ, то по критерию принадлежности (2)

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \boldsymbol{A}(\tilde{x} + tc) \subseteq \boldsymbol{b}. \tag{7}$$

С другой стороны, луч $(\tilde{x} + tc)$ целиком лежит в одном ортанте, поэтому

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad x_j c_j \geq 0$$

и в (7) можно раскрыть скобки по правилу дистрибутивности [2, 6]:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \boldsymbol{A}\tilde{x} + \boldsymbol{A}(tc) \subseteq \boldsymbol{b}. \tag{8}$$

Для произвольных интервальных векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ имеет место очевидное свойство

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \subseteq \boldsymbol{y} \end{array}\right\} \Longrightarrow |\boldsymbol{z}| \leq \operatorname{wid} \boldsymbol{y},$$

где $|\cdot|$ – модуль, wid – ширина интервальных векторов. Используя это свойство в (8) для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\tilde{x}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}(tc)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, получим, что должно выполняться неравенство

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\boldsymbol{A}(tc)| \leq \operatorname{wid} \boldsymbol{b}. \tag{9}$$

Для вещественного t применимо правило дистрибутивности [2, 6]. Это позволяет переписать (9) в виде

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \big|t(\boldsymbol{A}c)\big| \leq \operatorname{wid} \boldsymbol{b}.$$

Положительное t можно вынести за знак модуля и разделить на него обе части неравенства. Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad |\boldsymbol{A}c| \leq \frac{\operatorname{wid} \boldsymbol{b}}{t}.$$

Это возможно только при $|\boldsymbol{A}c| = 0$, что эквивалентно

$$\boldsymbol{A}c = 0. \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{:j} c_j = 0,$$

т. е. линейная комбинация столбцов интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ с коэффициентами, соответствующими компонентам вектора c, равна нулю. Остается заметить, что ненулевые коэффициенты в этой сумме могут стоять только при вещественных столбцах матрицы. В противном случае радиус линейной комбинации

$$\operatorname{rad}(\boldsymbol{A}c) = \sum_{j=1}^{n} |c_j| \operatorname{rad} \boldsymbol{A}_{:j} \tag{11}$$

будет отличен от нуля, что противоречит (10). □

Следствием утверждений 1 и 2 является

Критерий неограниченности. *Пусть допустимое множество Ξ непусто. Оно неограничено тогда и только тогда, когда в матрице $\boldsymbol{A}$ есть линейно зависимые вещественные столбцы.*

Примеры применения критерия неограниченности
(для непустого допустимого множества)

Интервальная матрица $\boldsymbol{A}$	Множество Ξ
Нет вещественных компонент	ограничено
Каждый столбец имеет невещественную компоненту	ограничено
Есть нулевые столбцы	неограничено
Есть пропорциональные вещественные столбцы	неограничено
Число вещественных столбцов, больше общего числа строк	неограничено

Замечание о виде неограниченного допустимого множества. Давайте попробуем представить, как выглядит неограниченное Ξ. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор коэффициентов, для которого линейная комбинация столбцов интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ равна нулю, т. е. $\boldsymbol{A}c = 0$. Обозначим через L пространство всех таких векторов. В силу (11) у вектора c могут отличаться от нуля только компоненты, соответствующие вещественным столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$. Значит, размерность пространства L равна $(p - q)$, где p – число всех вещественных столбцов, q – максимальное число линейно независимых вещественных столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$. Например, если в матрице $\boldsymbol{A}$ все вещественные столбцы нулевые, то размерность пространства L равна их числу.

Опираясь на доказательство утверждения 1, можно сказать, что Ξ представляет собой объединение прямых, параллельных произвольному вектору c из L. Следовательно, допустимое множество состоит из пространств, полученных параллельными сдвигами L. Для выпуклого многогранного множества это означает, что все его грани лежат в гиперплоскостях, параллельных L.

Список литературы

[1] Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis. – http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int/.

[2] Neumaier A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[3] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 3. – С. 51–61 (http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Shary/IzvAN.ps).

[4] Rohn J. Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985: Lect. Notes in Comput. Sci. / K. Nickel, ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – Vol. 212. – P. 157–158.

[5] Шайдуров В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. – Красноярск, 1988. – (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; 5).

[6] Шарая И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // Вычисл. технологии. – 1997. – Т. 2, № 1. – С. 71–83 (http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Irene/ct97.ps).